

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

55e jaargang
1979/1980
no. 10
juni/juli

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter: Dr. Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-1 51 05. Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag. Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Kapteynlaan 105, 3571 XN Utrecht. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt *f* 40,— per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. *f* 27,—; contributie zonder Euclides *f* 20,—.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij B. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9^{II}, 1078 JX Amsterdam, tel. 020-73 89 12. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van $1^1/_2$.

Boeken ter recensie aan W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn, tel. 055-25 08 34.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. S. A. Muller, Van Lynden van Sandenburglaan 63, 3571 BB Utrecht, tel. 030-71 09 65.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan A. Hanegraaf, Heemskerkstraat 9, 6662 AL Elst, tel. 08819-24 02, girorekening 1039886.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 35,20. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement *f* 20,50. Niet-leden kunnen zich abonneren bij:

Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, 9700 MB Groningen, tel. 050-16 21 89. Giro: 1308949.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.

Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers *f* 5,80 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Rekenmachientjes en basisschoolleerlingen

H. SISSING

In de circulaire van het ministerie van onderwijs en wetenschappen van 8 november 1978 wordt men dringend geadviseerd het gebruik van rekenmachientjes te verbieden in de eerste jaren van het voortgezet onderwijs, ter

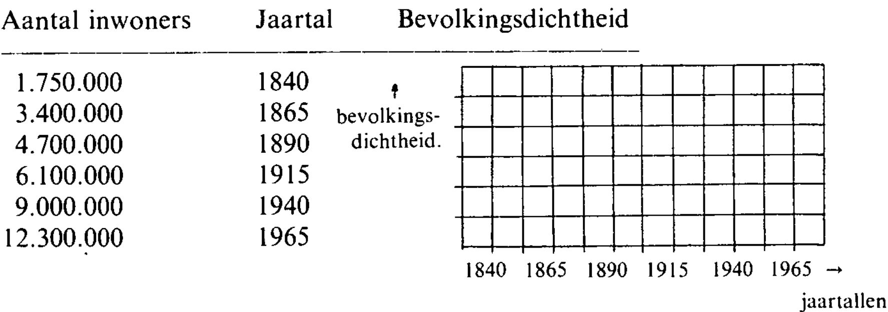


Wie gebruikt er eigenlijk nog geen rekenmachientje?

bevordering van de eigen rekenvaardigheid van de leerlingen. De basisschool wordt helemaal verzwegen. Toch kan het rekenmachientje daar al gebruikt worden. Het zou toch zonde zijn om de voordelen die het rekenmachientje biedt tot het voortgezet onderwijs te laten liggen. Ik denk dat zelfs wanneer je deze voordelen wilt laten liggen en op de traditionele manier doorgaat, de leerlingen zelf wel zo vrij zijn om je op het bestaan van het apparaat te wijzen. Het geven van cijfersommen als huiswerk heeft al geen enkele zin meer (heeft het misschien ook nooit gehad). Immers in bijna elk gezin is er een rekenmachientje aanwezig. Zelfs slechte cijferaars halen nu tienen voor dit huiswerk. Zij hebben duidelijk gebruik gemaakt van één van de grootste voordelen van het machientje n.l. het beperken van het cijferwerk tot een minimum. Zij hebben al ontdekt dat het machientje nauwkeurig, snel en betrouwbaar werkt. Aan ons de taak om van deze voordelen op de juiste manier gebruik te maken. Nu krijgen wij eindelijk de kans om het pure opgeblazen cijferwerk terug te brengen tot een onderdeeltje waarvoor je het rekenwerk nodig hebt. (G. A. Vonk over rekenmachientjes in het weekblad voor leraren bij het voortgezet onderwijs, jrg. 11 no 33, blz. 1382.) Maar laat ik een voorbeeld geven en daarbij meteen reageren op de vraag in het kadertje op blz. 368 van het Euclides-nummer over rekenmachientjes: 'Welke zijn dan toch die eigenlijke problemen?' (Euclides, mei 1979).

Een eigenlijk probleem bij wereldoriëntatie is het begrip bevolkingsdichtheid. Gewoonlijk stopt de uitleg bij het aantal inwoners per km². De vraag hoe men aan dat aantal komt kan men niet realistisch benaderen omdat het cijferwerk een obstakel vormt. Door het rekenmachientje kunnen de leerlingen zelf bezig zijn met het begrip en lossen, wanneer zij grafieken kunnen maken, de volgende opgave op:

Maak een grafiek van de bevolkingsdichtheid van Nederland over de periode 1840–1965. Oppervlakte: 33.600 km².



Aantal inwoners	Jaartal	Bevolkingsdichtheid
1.750.000	1840	
3.400.000	1865	
4.700.000	1890	
6.100.000	1915	
9.000.000	1940	
12.300.000	1965	

Wat zal de bevolkingsdichtheid zijn in 1980? . . . .
Wat was de bevolkingsdichtheid in 1880? . . .
En in 1835? . . .

Wanneer in dezelfde grafiek ook de bevolkingsdichtheid van Rijnmond wordt weergegeven, kan men komen tot een klassegesprek over de oorzaak en het

gevolg van het zichtbare verschil. Een kaart van Nederland waarin per provincie de bevolkingsdichtheid met een kleur wordt aangegeven, waarbij de donkerte van de kleur rechtevenredig is met het aantal inwoners per km^2, kan ook verhelderend werken. In deze opgave is het rekenwerk weer geworden tot een onderdeeltje en staat het begrip van het eigenlijke probleem voorop.
Andere eigenlijke problemen kunnen zijn: de verhouding van de godsdienstige gezindten in ons land, de resultaten van de gemeenteraadsverkiezingen, het reilen en zeilen van de financiële kant van Feyenoord (leerlingen kunnen nu zelf de winst berekenen van een volle kuip).
Eigenlijke problemen zijn voor mij die problemen uit de samenleving waarvan een realistische benadering voorheen niet mogelijk was door het vele cijferwerk. Zij werden daarom vervormd aangeboden. Het onderwijs, dat in opzet toch het instituut is geweest dat de leerling voorbereidde op de samenleving, is daarvan steeds verder verwijderd omdat zij haar eigen schoolsysteem heeft opgebouwd. Nu krijgt zij weer de kans om een deel van deze kloof te dichten. Wij moeten daarom het rekenmachientje niet alleen zo in het onderwijs inpassen dat het voldoet aan onze traditionele doelstellingen, maar ook bouwsteen laten zijn in de brug tussen onderwijs en samenleving.

Een ander sterk punt van het zakrekenmachientje is de motiverende werking ervan op de leerlingen of, zoals Sjoerd Schaafsma het in zijn artikel 'Mijn ervaringen in een LEAO' op blz. 356 van Euclides mei '79, zegt: 'Zo gauw je zegt dat je iets wilt gaan doen met rekenmachientjes worden de meeste leerlingen gek. Ze roepen en gillen door elkaar.' Voor welke andere schoolzaken, buiten de vakanties en de werkweken om, lopen de leerlingen zo warm? Een dergelijk enthousiasme moet toch te gebruiken zijn?
In het basisonderwijs probeer ik van deze bereidheid tot inzet van energie gebruik te maken door de leerlingen opgaven voor te schotelen waarbij zij gebruik mogen maken van het apparaat. Met deze opgaven probeer ik de leerlingen te laten nadenken over allerlei wiskundige en rekenkundige problemen en structuren.

Enkele van die opgaven zijn:
1 *Het werken met patronen*
Reken het volgende eens uit:
22^2 = ... (dat betekent 22 × 22 = ...)
22^3 = ... (dat betekent 22 × 22 × 22 = ...)
Wat zou 22^4 betekenen?
....
Maak nu de volgende opgave:
11^2 = ...
111^2 = ...
1111^2 = ...
11111^2 = ...
111111^2 = ...
1111111^2 = ...
De laatste antwoorden gaan niet meer in het venster maar als je goed naar de

antwoorden kijkt dan heb je het rekenmachientje helemaal niet nodig. Want wat valt je op als je goed naar de antwoorden kijkt?

....

....

2 *Het deelprobleem uit de I.O.W.O.-kalender van 1978*
(P.S. Steun de actie voor het behoud van het I.O.W.O.)

3	/16\	5	1
DELER	DEELTAL	QUOTIËNT	REST
71	...	38	43
391	...	405	231
379	15317	...	...
8346	8347	...	...

3 *De rekenregels*
Maak de volgende opgaven:
1 66 × 45 = ... , 33 × 90 = ...
2 28 × 75 = ... , 14 × 150 = ...
3 50 × 34 = ... , 100 × 17 = ...
4 76 × 32 = ... , 38 × 64 = ...
Wat valt je op? ....

....

Hoe zou dat komen? ....

....

1 55 : 5 = ... , 110 : 11 = ...
2 111 : 37 = ... , 1500 : 50 = ...
3 750 : 25 = ... , 1500 : 50 = ...
Wat valt je op? ....

....

Hoe zou dat komen? ....

....

4 *Optimalisering van het taxatie-rekenen*

<u>SCHATTEN</u>



Maak eerst een schatting en controleer met de rekenmachine of het enigszins klopt.

OPGAVE	SCHATTING	ANTWOORD
89 x 91 = ..	.....	.....
2,73+4,24=	.....	.....
100: 9,8 = ...	.....	.....
100:0,98 = ...	.....	.....
100:0,098=	.....	.....
39 x 0,26=	.....	.....
3,71 :0,6=	.....	.....

f 4,00
f 3,70
f 5,30
f 6,15

Schatting:f...... : f......

f 13,98
f 16,12
f 20,30
f 40,15

Schatting:f...... : f......

5 *Het probleem even, oneven*
Toets in 2.
Tel er steeds 2 bij op.
Kom je 13 tegen? ja/nee
Kom je 18 tegen? ja/nee
Kom je 29 tegen? ja/nee
Kom je 32 tegen? ja/nee
Kom je 33 tegen? ja/nee
Kom je 38 tegen? ja/nee
Kom je 42 tegen? ja/nee
Kom je 49 tegen? ja/nee
Hoe komt het nu, dat je sommige van de bovenstaande getallen wel tegen komt als je twee bij optelt en andere weer niet? ....

. . . .

. . . .

6 *Commutatieve eigenschappen*

Maak de volgende opgaven:

1 937 × 854 = . . . , 854 × 937 = . . .
2 654 × 321 = . . . , 321 × 654 = . . .
3 8765 × 4321 = . . . , 4321 × 8765 = . . .

Wat valt je op?

. . . .

Vul in: Bij het vermenigvuldigen mag je . . . .

. . . .

Gaat dat ook op voor het optellen?

. . . .

7 *Getalstructuren*

Toets in 5.
Deel 5 door 10.
Wat gebeurt er in het venster?

. . . .

Met welk getal moet je dit getal vermenigvuldigen om weer 5 te krijgen? . . .
Deel 5 weer door 10.
Deel het getal in het venster nogmaals door 10. Wat gebeurt er in het venster?

. . . .

Met welk getal moet je het getal in het venster vermenigvuldigen om weer 5 te krijgen?

. . . .

Kun je dat verklaren?

. . . .

. . . .

8 *Tabellen*

Stand eredivisie

	1	2	3	4	5	6 7
PSV	24	18	6	0	42	61-10
Twente	23	14	6	3	34	50-18
AZ'67	24	14	6	4	34	54-21
Ajax	24	12	7	5	31	47-28
Sparta	23	10	8	5	28	36-24
Feyenoord	24	9	8	7	26	40-32
NEC	24	10	5	9	25	31-34
Roda/JC	23	8	8	7	24	25-24
Den Haag	23	11	2	10	24	42-42
Volendam	24	9	4	11	22	34-42
Vitesse	24	6	9	9	21	34-45
NAC	23	6	7	10	19	22-35
Utrecht	23	5	8	10	18	25-34
Haarlem	23	5	8	10	18	24-36
VVV	24	6	6	12	18	32-52
GA/Eagles	23	6	3	14	15	32-45
Amsterdam	23	5	5	13	15	26-54
Telstar	23	2	4	17	8	17-55

In de bovenstaande tussenstand zie je zes rijen cijfers. De eerste rij geeft het aantal gespeelde wedstrijden aan. De tweede rij geeft het aantal gewonnen wedstrijden aan. De derde rij geeft het aantal gelijkgespeelde wedstrijden. De vierde rij het aantal verloren wedstrijden. De vijfde rij geeft het aantal punten aan van de club, voor iedere gewonnen wedstrijd krijgt zij twee punten, voor een gelijkspel één punt en voor een verloren wedstrijd geen punten. De zesde rij geeft aan het aantal doelpunten dat de club scoorde en de zevende rij geeft aan het aantal doelpunten dat de tegenstanders gemaakt hebben.

Op welke plaats zou de volgende club moeten staan?

F.C. Juliana 24 10 10 4 .. 36-21

Wat is het gemiddeld aantal doelpunten van AJAX per wedstrijd? . . . .

Wie scoort per wedstrijd meer doelpunten VVV of GA/Eagles? . . . .

Tel het aantal doelpunten dat de clubs zelf gescoord hebben bij elkaar op. . . . . doelpunten.

Tel het aantal doelpunten dat de tegenstanders gescoord hebben op. . . . . doelpunten.

Wat merk je op?

. . . .

Hoe zou dat komen denk je?

. . . .

. . . .

Tel het aantal gewonnen wedstrijden van de clubs op en bereken het aantal punten dat zij in totaal haalden. Tel ook het aantal gelijkgespeelde wedstrijden op en bereken het aantal punten. Tel de uitkomsten op. . . . + . . . = . . .

Tel rij 5 op en vergelijk de uitkomst met het vorige antwoord. Wat valt je op?

. . . .

Hoe zou dat komen denk je?

. . . .

. . . .

Tel het aantal gewonnen wedstrijden van de clubs op. . . . .

Tel het aantal verloren wedstrijden van de clubs op. . . . .

Wat valt je op?

. . . .

Hoe komt dat denk je?

. . . .

En zo is deze rij nog veel en veel verder uit te breiden met allerlei probleempjes.

Een echte uitdaging voor de leerlingen is ook het werken met een beperkt aantal toetsen, waardoor ze op speelse wijze met essentiële dingen bezig zijn en deze overdenken.

Enkele van de 'kapotte knoppen opgaven' zijn:

1 Delen waarbij je de deeltoets *niet* mag gebruiken.

Maak de volgende deling:

387 : 47 = . . . rest . . .

Hoe heb je dat uitgerekend?

. . . .

. . . .

Idem: 1059 : 44 = ...
11.111 : 27 = ...
21.345 : 51 = ...
1.543.210 : 137 = ...

Heb je inmiddels nog een manier gevonden om deze opgaven uit te rekenen?

. . . .

. . . .

. . . .

2 Ontbinden in factoren:
Kun je 8 × 12 uitrekenen als je alléén maar de ×-toets en twee cijfertoetsen mag gebruiken?
En 10 × 25?
Kun je 18 × 36 uitrekenen als je gebruik *moet* maken van de toetsen 2 en 3 en de ×-toets?
En 8 × 16 als je de ×-toets en de 2-toets *moet* gebruiken?
Kun je 64 door 32 delen als je voor 32 alleen de 2-toets mag gebruiken?

Ik hoop dat het voorgaande enigszins heeft aangetoond dat het rekenmachientje op de basisschool goed te gebruiken is.

Ik wil eindigen met twee vragen:
- Hoeveel ruimte moeten de rekenmachientjes krijgen in het basisonderwijs en de lagere klassen van het voortgezet onderwijs?
- Welke vaardigheden moeten de leerlingen van het basisonderwijs blijven bezitten als ze naar het voortgezet onderwijs gaan?

Over de auteur:

Henk Sissing, geboren 1954, is onderwijzer aan de Immanuëlschool te Krimpen a/d IJssel, studeert pedagogiek en heeft als hobby wiskunde voor de basisschool.

De werking van correctievoorschriften bij het CSE HAVO 1979-II*

A. J. M. DE JONG
H. N. SCHURING

Sinds augustus 1976 functioneert binnen het CITO het Project Open Vragen (POV). Doel van dit, mede door de CVO geïnitieerde, project is te komen tot een verbetering van de kwaliteit van de examens in open-vraagvorm. Het onderhavige onderzoek past binnen de aandacht die in het project besteed wordt aan de problematiek van het beoordelen.

1 Inleiding

Een bekend gegeven is dat bij de beoordeling van open vragen, dat zijn die vragen waarbij de leerling zelf zijn antwoord moet formuleren, beoordelaars aan hetzelfde antwoord een verschillende waardering kunnen geven. De Groot (1961) noemt vijf redenen waarom beoordelaars kunnen verschillen.

1 *signifisch effect*; beoordelaars kunnen een verschillende opvatting hebben over de beoordelingstaak.
2 *halo-effect*; andere kenmerken van het te beoordelen antwoord dan het kenmerk waarnaar het antwoord beoordeeld moet worden, kunnen invloed hebben op de beoordeling (de factor handschrift is een bekend voorbeeld).
3 *sequentie-effect*; de doorwerking van voorafgaande beoordelingen op de dan uit te voeren beoordeling.
4 *normverschuiving of persoonlijke vergelijking*; correctoren verschillen in hun distributie van scores over de beoordelingsschaal. Normverschuiving houdt dan in een aanpassing aan de groep, centreren van scores rond een gemiddelde (Gausscurve), persoonlijke vergelijking houdt in het verschil tussen soepele en strenge correctoren. (Wansink (1969) noemt normverschuiving en persoonlijke vergelijking als aparte categorieën.)
5 *contaminatie-effect*; wanneer een beoordelaar belangen heeft bij de toe te kennen waardering dan kan dit zijn beoordeling beïnvloeden (bv. *mijn* school heeft x% geslaagden).

Het halo-effect, sequentie-effect, contaminatie-effect en de normverschuiving

*) Dit onderzoek werd uitgevoerd onder supervisie van Ch. Hamaker, J. Kok en P. Sanders.

zijn als mogelijke medebepalers voor een toe te kennen score theoretisch gezien vrij eenvoudig uit te schakelen. In de praktijk echter zal dit tot een enorme administratieve rompslomp aanleiding geven (bijv. overtypen van werken om het halo-effect te voorkomen) met de daaraan gepaard gaande kosten terwijl sommige maatregelen ongetwijfeld tot grote sociale onrust in het onderwijsveld zullen leiden (bijv. centrale beoordeling om het contaminatie-effect tegen te gaan).
Niet genoemd in bovenstaande opsomming is het signifisch-effect. De reden hiervoor is dat maatregelen die mogelijk de invloed van dit effect kunnen beperken centraal geregeld kunnen worden en al worden. De Groot (1961) beveelt als maatregelen tegen het signifisch effect aan: 'reductie, vereenvoudiging c.q. explicitering, verscherping van de beoordelaarstaak.'

Deze maatregelen worden ondergebracht in een correctievoorschrift. Een correctievoorschrift bestaat uit voorschriften volgens welke gecorrigeerd wordt en wordt als *bindend* voorschrift meegeleverd bij examens.
Een correctievoorschrift bestaat uit algemene regels (de regels *a* t/m *i* in het correctievoorschrift uit de bijlage), een antwoordmodel en een scoringsvoorschrift (het maximale aantal punten per (deel)antwoord). Correctievoorschriften kunnen verschillend zijn voornamelijk afhangend van de inhoud van het antwoordmodel. We kunnen twee soorten antwoordmodellen onderscheiden:

- *globaal antwoordmodel*; er wordt een voorbeeld van een goed antwoord gegeven of er wordt in essentie aangegeven wat in het goede antwoord moet staan.
- *gedetailleerd antwoordmodel*; in het antwoordmodel zijn naast het goede antwoord, gedeeltelijk goede antwoorden en specifiek bij de vraag behorende fouten en/of omissies opgenomen. (Bij een gedetailleerd antwoordmodel worden in het bijbehorende scoringsvoorschrift het toe te kennen aantal punten voor deelantwoorden, fouten en omissies gegeven).

Na deze beschrijving zal het duidelijk zijn dat correctievoorschriften niet slechts het signifisch effect beperken maar ook invloed hebben op het effect van normverschuiving en persoonlijke vergelijking, zij het in beperkte mate.

Bij de CSE's Wiskunde worden correctievoorschriften gebruikt waarvan het antwoordmodel als gedetailleerd omschreven kan worden (zie de bijlage).

2 Het onderzoek

In dit onderzoek wilden we nagaan wat de overeenstemming tussen beoordelaars is die bereikt wordt bij het correctievoorschrift zoals gebruikt bij de huidige examens.
Wanneer het correctievoorschrift werkt op het signifisch effect moeten bij deze onderzoeksvraag de andere effecten (het halo-effect, sequentie-effect en contaminatie-effect) uitgeschakeld worden. Dat is in dit onderzoek experimen-

teel gedaan. Het effect van normverschuiving en persoonlijke vergelijking neemt een bijzondere positie in (mede door het deels onder controle houden hiervan door het correctievoorschrift). Dit effect kon niet experimenteel uitgeschakeld worden, wel werd achteraf door gemiddelden van beoordelaars te vergelijken het effect van persoonlijke vergelijking bekeken.

De opzet van het onderzoek was als volgt: 5 beoordelaars (allen docent wiskunde) beoordeelden ieder dezelfde 20 examenwerken. Dit waren originele examenwerken van het CSE 1979-II. Per vraag werd nu een maat berekend voor de overeenstemming tussen de beoordelaars over de 20 antwoorden op die vraag. Deze maat wordt *interbeoordelaarsbetrouwbaarheid* (r.) genoemd en is gelijk aan 1 bij maximale overeenstemming tussen correctoren, terwijl bij totale divergentie van beoordeling deze maat de waarde nul nadert.
In veel studies wordt interbeoordelaarsbetrouwbaarheid weergegeven met een gemiddelde intercorrelatiecoëfficiënt. Omdat correlatiecoëfficiënten geen rekening houden met verschillen in gemiddelden tussen beoordelaars (alleen de relatieve rangorde van de beoordeelde werken telt dan) is in dit onderzoek gekozen voor een andere benadering.
De daadwerkelijke score die een leerling krijgt wordt gezien als de *geobserveerde score*. Deze geobserveerde score is opgebouwd uit twee elementen, *de ware score* van de leerling en *de restscore*. De ware score is de score die de leerling zou behalen zonder alle storende variabelen (bijv. beoordelaarseffecten, verkoudheid etc.). De ware score kan het best voorgesteld worden als de gemiddelde score die een leerling voor een vraag zou krijgen wanneer deze in alle mogelijke omstandigheden afgenomen wordt. De restscore wordt bepaald door toevallige factoren. (Welke beoordelaar, het afgeleid zijn van de leerling etc.)
Wanneer deze scores over de verschillende leerlingen en beoordelaars bekeken wordt, vertonen zij variantie. De geobserveerde scorevariantie (σ_x^2) kan analoog aan het bovenstaande in een aantal variantiecomponenten opgedeeld worden. Dit zijn:

- σ_p^2, de ware score variantie
- σ_f^2, de restscore variantie.

Deze restscore variantie is zelf ook weer in een aantal variantiecomponenten te scheiden. Voor de situatie waarin elke beoordelaar de examenwerken van zijn eigen leerlingen beoordeelt (de examensituatie), is de restscore variantie opgebouwd uit:

- σ_c^2, de variantie veroorzaakt door beoordelaars.
- σ_{pc}^2, de variantie veroorzaakt door een interactie tussen beoordelaars en leerlingen.
- σ_e^2, de variantie veroorzaakt door error, d.w.z. alle toevallige factoren echter zonder de beoordelaar als toevallige factor, deze is als aparte variantie component opgenomen.

σ_e^2 en σ_{pc}^2 zijn in dit onderzoek niet te scheiden en vormen samen $\sigma^2_{(pc,e)}$.

Resumerend komen we tot de volgende gelijkheid.

Formule 1: $\sigma_x^2 = \sigma_p^2 + \sigma_c^2 + \sigma_{(pc,\,e)}^2$

De betrouwbaarheid nu is de verhouding tussen ware score variantie en geobserveerde score variantie, in feite dus die proportie van de geobserveerde variantie die door de ware variantie verklaard wordt.

Formule 2: $$r = \frac{\sigma_p^2}{\sigma_p^2 + \sigma_c^2 + \sigma_{(pc,\,e)}^2}$$

Dat deze betrouwbaarheid de interbeoordelaarsbetrouwbaarheid is, is gelegen in het feit dat componenten waarover gegeneraliseerd wordt, beoordelaarscomponenten (σ_c^2 en $\sigma^2_{(pc,e)}$) zijn.
Door middel van de gegevens uit de steekproef kunnen schattingen gemaakt worden van de afzonderlijke variantiecomponenten in de populatie. Met behulp van deze schattingen kan formule 2 steeds opnieuw bij elke vraag berekend worden. Een uitgebreide meer technische beschrijving van bovenstaande geeft Rajaratnam (1960).
Voor de juiste interpretatie van de gegevens zoals hierna gepresenteerd zijn twee punten van belang.

- In het onderzoek worden die examenwerken gebruikt waarbij op het merendeel der vragen een antwoord gegeven werd. Bovendien werden bij de analyse per vraag die leerlingwerken verwijderd die op die bepaalde vraag een blanco antwoord gaven. De rationale hierachter is dat een correctievoorschrift niet hoeft te functioneren wanneer geen antwoord gegeven wordt. Echter, wanneer blanco antwoorden verwijderd worden, verdwijnen uit de analyse per vraag nul-antwoorden waar alle correctoren het over eens zullen zijn. Dit heeft tot gevolg dat de interbeoordelaarsbetrouwbaarheid zoals bepaald in dit onderzoek een *onderschatting* is van de interbeoordelaarsbetrouwbaarheid in de examensituatie waar deze blanco antwoorden wel beoordeeld worden.
  In de examensituatie is de overeenstemming per vraag dus groter.
- Vanuit een ander gezichtspunt echter is de berekende interbeoordelaarsbetrouwbaarheid een *overschatting* van de interbeoordelaarsbetrouwbaarheid in de werkelijkheid. Zoals boven al is genoemd worden n.l. het sequentie-effect, het contaminatie-effect en het halo-effect als mogelijke verlagers van de interbeoordelaarsbetrouwbaarheid uitgeschakeld. In de werkelijke beoordelingssituatie zijn deze effecten mogelijk wel werkzaam.

3 De resultaten

In onderstaande tabel is per opgave-onderdeel de berekende interbeoordelaarsbetrouwbaarheid, r, van de vijf beoordelaars weergegeven. Tevens is de p'-

waarde per onderdeel vermeld. p′ is de gemiddelde score over alle 5 beoordelaars over alle 20 leerlingen (van 100 scores dus), uitgedrukt in procenten van de maximaal te behalen score per onderdeel. p″ is de gemiddelde score over de vijf beoordelaars uitgedrukt in procenten van de maximale score bij die leerlingantwoorden die ook gebruikt zijn bij de bepaling van de interbeoordelaarsbetrouwbaarheid, dus zonder de blanco antwoorden. Bijv. bij vraag 4b waren 5 leerlingen die een blanco antwoord gaven. De p″-waarde wordt dus berekend over 15 leerlingen i.p.v. de 20 leerlingen bij de p′. Daar de weggelaten antwoorden 0 antwoorden zijn (geen antwoord nl.) ligt p″ altijd hoger (wanneer er tenminste blanco antwoorden verwijderd zijn) dan p′.

opgave-onderdeel	r	p′	p″
1a	0,96	74	74
b	0,84	54	57
c	0,66	49	54
2a	0,90	74	74
b	0,88	80	80
c	0,89	13	13
3a	0,84	50	50
b	0,91	48	48
c	0,93	37	37
4a	0,81	78	78
b	0,88	29	32
c	0,93	47	62
5a	0,81	34	34
b	0,94	30	30
c	0,78	31	34
gemiddeld	0,86	48,5	

De interbeoordelaarsbetrouwbaarheid is voor de meeste opgave-onderdelen bijzonder hoog. We mogen dan ook concluderen dat in het algemeen het correctievoorschrift voor dit examen goed functioneert. Een uitzondering hierop is onderdeel 1c, met r = 0,66.
Uit een analyse van de antwoorden, die de kandidaten voor dit onderdeel gegeven hebben, blijkt dat de verschillen in beoordeling voornamelijk optreden bij die kandidaten die fouten gemaakt hebben in onderdeel 1b. Een foutieve normaalvector van vlak *W* levert soms een sterk vereenvoudigde vergelijking van *W* op, wat de beoordelaars naar eigen inzicht moesten waarderen.
Een soortgelijk probleem doet zich voor in onderdeel 5c, waarin sommige kandidaten gebruik maken van foutieve grafieken, die in onderdeel 5b getekend moesten worden.
Men zou kunnen verwachten dat de interbeoordelaarsbetrouwbaarheid hoger

is bij opgave-onderdelen met een lage p′-waarde of een hoge p′-waarde dan bij opgave-onderdelen met een p′-waarde in de buurt van 50. Immers bij deze laatste onderdelen moeten gedeeltelijk goede antwoorden beoordeeld worden. In dit onderzoek doet dit verschijnsel zich niet voor.
In de volgende tabel is de berekende gemiddelde score over de 20 leerlingen per opgave-onderdeel en per beoordelaar vermeld. Tevens is de gemiddelde score $\bar{x}$ van de vijf beoordelaars berekend, waaruit de p′-waarde gevonden kan worden.

opgave-onderdeel	beoordelaar						
	1	2	3	4	5	$\bar{x}$	p
1a	*4,25*	4,35	4,40	*4,65*	4,55	4,44	74
b	3,85	*3,20*	3,75	*4,20*	4,00	3,80	54
c	*1,90*	2,30	2,45	2,50	*3,00*	2,43	49
2a	3,00	2,90	2,90	2,95	2,95	2,94	74
b	5,65	5,75	5,50	5,75	5,40	5,61	80
c	0,80	0,85	0,95	1,00	0,90	0,90	13
3a	1,70	1,90	2,00	2,35	2,00	1,99	50
b	2,50	2,80	2,95	3,05	2,95	2,85	48
c	*2,50*	2,95	2,85	*3,20*	*3,15*	2,93	37
4a	5,60	5,55	5,15	5,85	5,25	5,48	78
b	1,00	1,15	1,15	1,25	1,15	1,14	29
c	3,20	3,40	3,10	3,50	3,20	3,28	47
5a	*1,35*	1,75	1,70	*2,20*	*1,40*	1,68	34
b	2,40	2,50	2,60	2,95	2,90	2,67	30
c	0,90	0,95	1,45	1,40	1,45	1,23	31
totaal-score	40,6	42,3	42,9	46,8	44,3	43,4	
incl. 10 bonuspnt.	51	52	53	57	54	53	

De cursief gedrukte getallen verschillen significant per opgave-onderdeel:
In onderdeel 1a is beoordelaar 1 strenger dan beoordelaar 4 met een significantieniveau van 0,01.
In onderdeel 1b is beoordelaar 2 strenger dan beoordelaar 4 met een significantieniveau van 0,01.
In onderdeel 1c is beoordelaar 1 strenger dan beoordelaar 5 met een significantieniveau van 0,05.
In onderdeel 3c is beoordelaar 1 strenger dan beoordelaar 4 en
is beoordelaar 1 strenger dan beoordelaar 5 met een significantieniveau van 0,05.
In onderdeel 5a is beoordelaar 1 strenger dan beoordelaar 4 en
is beoordelaar 5 strenger dan beoordelaar 4 met een significantieniveau van 0,05.

In de tabel kan men verder aflezen dat beoordelaar 1 het strengst is en beoordelaar 4 het soepelst.
N.B. Uit de enquêtegegevens van het eerste tijdvak HAVO-1979 blijkt dat de gemiddelde score, inclusief 10 bonuspunten, voor dat examen ook 53,4 is.

In de volgende tabel is per kandidaat de eindscore, zonder de 10 bonuspunten, vermeld, zoals bepaald is door de vijf beoordelaars.

kandidaat	beoordelaar				
	1	2	3	4	5
1	70	72	71	70	71
2	46	47	53	53	53
3	36	38	33	43	39
4	25	31	26	37	30
5	37	36	40	36	44
6	76	80	75	79	79
7	33	30	32	36	37
8	47	51	54	56	52
9	34	29	32	35	34
10	27	31	34	36	30
11	42	45	43	46	39
12	54	63	63	68	69
13	54	60	56	68	58
14	50	55	57	56	56
15	19	19	21	24	19
16	13	13	14	19	12
17	35	35	38	50	44
18	14	12	16	18	14
19	50	46	50	54	53
20	51	53	50	53	52

Indien uit deze scoreresultaten direct de eindcijfers zouden moeten worden berekend, met cesuur 54/55, dan krijgen de kandidaten 4, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 16, 17 en 18 een punt meer bij beoordelaar 4; de kandidaten 7 en 12 een punt meer bij beoordelaar 5 en de kandidaten 12, 13 en 14 een punt minder bij beoordelaar 1, ten opzichte van de overige beoordelaars. Kandidaat 11 krijgt een punt meer bij beoordelaar 2; kandidaat 3 een punt minder en kandidaat 18 een punt meer bij beoordelaar 3.
De interbeoordelaarsbetrouwbaarheid berekend over de totaalscores is 0,96.

4 De conclusies

a Bij dit wiskunde-examen kan een hoge interbeoordelaarsbetrouwbaarheid bereikt worden. Of de hoge interbeoordelaarsbetrouwbaarheid direct een functie is van het correctievoorschrift, of dat de inhoud van het vak in hoge mate bepalend is hiervoor, kan uit dit onderzoek niet worden geconcludeerd.

b Indien in een opgave-onderdeel gebruik moet worden gemaakt van de resultaten van een vorig onderdeel, is de interbeoordelaarsbetrouwbaarheid lager dan in andere opgave-onderdelen.

c Gezien de voorgaande conclusie zou een verhoging van de interbeoordelaarsbetrouwbaarheid bereikt kunnen worden door:
- slechts onderling onafhankelijke opgave-onderdelen op te nemen.
- in het correctievoorschrift voor die opgave-onderdelen, die afhankelijk zijn van de resultaten van voorgaande onderdelen, op te nemen hoe te handelen indien de resultaten van voorgaande onderdelen een aanzienlijke vereenvoudiging (of verzwaring) van het betreffende onderdeel veroorzaakt.

d In de literatuur vindt men de opvatting dat vragen die erg gemakkelijk of moeilijk zijn, een hoge beoordelaarsovereenstemming te zien zullen geven. Vragen met p'-waarde van omstreeks 50 zouden dan tot de grootste verschillen aanleiding kunnen geven. Dit is hier niet het geval.

Literatuur

De Groot, A. D., *Methodologie*, Den Haag: Mouton 1961.
Rajaratnam, N., Reliability formules for independent decion data when reliability data are matched. *Psychometrika*, 1960, 25, no. 3.
Wansink, J. H., *Didactische oriëntatie voor wiskunde leraren I*, Groningen: Wolters-Noordhoff. 1971.

BIJLAGE

CSE HAVO 1979-II, zie *EUCLIDES* 1979/1980, blz. 241.

COMMISSIE VASTSTELLING OPGAVEN VWO-HAVO-MAVO.

Bindende normen voor de beoordeling van het schriftelijk werk, vastgesteld door de commissie, bedoeld in artikel 24, lid 1, van het Besluit eindexamens VWO-HAVO-MAVO.

HAVO

WISKUNDE

Tweede tijdvak 1979

In het Besluit eindexamens VWO-HAVO-MAVO zijn twee artikelen opgenomen die betrekking hebben op de correctie van het schriftelijk werk.

Artikel 27, vijfde lid, luidt:
'Indien de commissie belast met de vaststelling van de opgaven bindende normen voor de beoordeling van het werk heeft opgesteld, passen de examinator en de gecommitteerde deze bij hun beoordeling toe.

Artikel 28, eerste en tweede lid, luidt:
'De examinator en de gecommitteerde stellen in onderling overleg het cijfer voor het schriftelijk examen vast. Daarbij gebruiken zij één van de cijfers uit de schaal van cijfers, genoemd in artikel 16, achtste lid.
(cijfers lopende van 1 tot en met 10 met de daartussen liggende cijfers met één decimaal)

Komen ze daarbij niet tot overeenstemming, dan wordt het cijfer bepaald op het rekenkundig gemiddelde van het door ieder van hen voorgestelde cijfer. Indien het gemiddelde, bedoeld in de vorige volzin een cijfer is dat als tweede decimaal een vijf heeft, wordt de eerste decimaal met één verhoogd.'

De examinator en de gecommitteerde zijn derhalve verplicht de bindende normen toe te passen. Indien men na mondeling overleg geen overeenstemming bereikt heeft op basis van de bindende normen, dan wordt het cijfer vastgesteld op het rekenkundig gemiddelde van beide voorgestelde cijfers.

Het cijfer voor het schriftelijk werk is een getal uit de schaal van 1 tot en met 10 met de daartussen liggende getallen met één decimaal.
Het cijfer wordt bepaald met toepassing van de volgende regels:
a Voor het schriftelijk werk worden maximaal 100 punten gegeven.
b Elke kandidaat krijgt vooraf 10 punten toegekend.
Er blijven derhalve maximaal 90 punten over voor de waardering van de prestaties van de kandidaat.
c Bij de waardering van het schriftelijk werk is een fijnere verdeling dan in gehele punten niet geoorloofd.
d Ontbreekt voor een onderdeel elke prestatie of is een onderdeel volledig foutief beantwoord, dan worden voor dit onderdeel geen punten gegeven.
e Is de beantwoording van een onderdeel niet geheel juist of is de vereiste motivering onvolledig, dan dient op basis van het maximaal beschikbare aantal punten voor dit onderdeel een zodanig geheel aantal punten te worden gegeven dat een daarmede evenredige waardering wordt uitgedrukt.
f Voor elke rekenfout of verschrijving in de berekening wordt één punt afgetrokken tot het maximum van het aantal punten dat voor het desbetreffende deel van het onderdeel van het vraagstuk gegeven wordt.
g Bij de vaststelling van de normering voor onderdelen van een vraagstuk is meestal uitgegaan van een bepaalde methode van oplossing.
Indien een kandidaat een andere, juiste methode van oplossing heeft gevolgd, dienen de punten toegekend te worden op een wijze die zo goed mogelijk aansluit bij de gegeven normering.
h Het cijfer in één decimaal voor het schriftelijk werk ontstaat door het aantal toegekende punten door 10 te delen.
i Voor elk onderdeel van de vraagstukken mogen maximaal de onderstaande aantallen punten worden gegeven.

1 *a* 6 punten:	voor een richtingsvector van *n*	1 punt
	voor een v.v. van *n*	1 punt
	voor de berekening van de parameter van het snijpunt van *n* en *V*	3 punten
	voor de coördinaten van het snijpunt	1 punt
b 7 punten:	voor een normaalvector van *V*	1 punt
	voor een normaalvector van *W*	3 punten
	voor het inwendig produkt van deze normaalvectoren = 0	2 punten
	voor de hoek van *V* en *W*	1 punt
c 5 punten:	voor een vergelijking of vectorvoorstelling van *W*	1 punt
	voor het onderzoek	3 punten
	voor de conclusie dat *n* in *W* ligt	1 punt
2 *a* 4 punten:	voor de vergelijking $x^2 + 2x = 3$	2 punten
	voor de coördinaten van elk punt op de grafiek	1 punt
b 7 punten:	voor het tekenschema van $f_1(x)$	1 punt

	voor de afgeleide f_1'	1 punt
	voor het tekenschema van $f_1'(x)$	1 punt
	voor elke extreme waarde	1 punt
	voor de grafiek	2 punten
c 7 punten:	voor $f_p'(x) = x^2 + 2px$	1 punt
	voor $f_p'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2p$	1 punt
	voor $f_p(0) = 0$	1 punt
	voor $f(-2p) = \frac{4}{3}p^3$	1 punt
	voor $p = 1\frac{1}{2}$	1 punt
	voor het bewijs dat het een maximum is	2 punten
3 *a* 4 punten:	voor elke breuk $\frac{6}{12}$ en $\frac{5}{11}$	1 punt
	voor $p = \frac{6}{12} \times \frac{5}{11} = \frac{5}{22}$	2 punten
	indien elke toelichting ontbreekt ten hoogste 1 punt toekennen.	
b 6 punten:	voor de kans op twee tweede prijzen $= \frac{2}{12} \times \frac{1}{11}$	2 punten
	voor de kans op de eerste prijs en één niet $= \frac{1}{12} \times \frac{6}{11} \times 2$	3 punten
	indien de factor 2 ontbreekt ten hoogste 1 punt toekennen.	
	voor de gevraagde kans $p = \frac{7}{66}$	1 punt
c 8 punten:	voor de kans op de eerste prijs en twee nieten $= \frac{1}{12} \times \frac{6}{11} \times \frac{5}{10} \times 3$	2 punten
	voor de kans op één tweede en twee derde prijzen $= \frac{2}{12} \times \frac{3}{11} \times \frac{2}{10} \times 3$	2 punten
	voor de kans op twee tweede prijzen en één niet $= \frac{2}{12} \times \frac{1}{11} \times \frac{6}{10} \times 3$	2 punten
	voor de gevraagde kans $p = \frac{27}{220}$	2 punten
	telkens als de factor 3 ontbreekt 1 punt aftrekken.	
4 *a* 7 punten;	voor de coördinaten van elk snijpunt	1 punt
	voor de top van $p(-1, 0)$	1 punt
	voor de tekening van p	1 punt
	voor de tekening van c	1 punt
b 4 punten;	voor elk element van de oplossingsverzameling	1 punt
	indien de oplossingsverzameling in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ is gegeven ten hoogste 2 punten toekennen; indien de oplossingsverzameling in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ is getekend ten hoogste 1 punt toekennen.	
c 7 punten;	voor de r.c. van de raaklijn aan c	1 punt
	voor de r.c. van de raaklijn aan p	3 punten
	voor de hoek van de raaklijn aan c met de x-as	1 punt
	voor de hoek van de raaklijn aan p met de x-as	1 punt
	voor de hoek van de beide raaklijnen	1 punt
5 *a* 5 punten;	voor $\sin x = -\frac{1}{2} \vee \sin x = 1$ elk	1 punt
	voor de coördinaten van elk gemeenschappelijk punt	1 punt
b 9 punten;	voor het tekenschema van $f(x)$	1 punt
	voor de afgeleide f'	1 punt
	voor het tekenschema van $f'(x)$	1 punt
	voor de drie lokale extreme waarden	1 punt
	voor de randextremen	1 punt
	voor de grafiek van f	2 punten
	voor de grafiek van g	2 punten
	indien elke toelichting bij de grafiek van g ontbreekt ten hoogste 1 punt toekennen.	
c 4 punten;	voor $x = \frac{1}{2}\pi$	2 punten
	voor $x \in [\frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi]$	2 punten
	indien $x = \frac{7}{6}\pi$ en/of $x = \frac{11}{6}\pi$ niet zijn inbegrepen 1 punt aftrekken.	

Het Mavo-projekt, wiskunde brugklas

Bespreking van een verslag

P. M. VAN HIELE

Van de Vakbegeleidingsgroep Wiskunde van het MAVO-PROJEKT ontvingen wij ter inzage en bespreking een katern 'Begeleiding in het MAVO-PROJEKT-Wiskunde'. Ik maak daarbij de volgende kanttekeningen.

De doelstellingen van het mavoprojekt zijn eigenlijk een heel logisch gevolg van de opzet van de 'mammoetwet'. Zodra bekend was, dat er een Mavo-3 geschapen was, kwam meteen de vraag: 'Hoe moeten we hiervoor een programma maken dat voldoende afwijkt van Mavo-4?' En in de praktijk bleek vanzelf, dat er de eerste jaren geen duidelijk verschil tussen de leerlingen is. Goed, er zijn in de brugklas leerlingen die de stof minder goed aankunnen dan andere, maar zijn dat ook de leerlingen die in het tweede jaar minder zijn? Heel dikwijls blijkt dit niet het geval te zijn en daarvoor zijn gemakkelijk veel oorzaken aan te wijzen. De leerling is soms in het tweede jaar meer bereid zich in te spannen, het is ook mogelijk dat hij een betere greep op de leerstof krijgt, het kan ook zijn dat hij een andere docent heeft gekregen die hem beter voor het werk kan animeren. Wil men met deze en nog andere faktoren rekening houden, dan dient men er vooral voor te zorgen, dat de leerling niet door zijn mindere dispositie in het brugjaar essentiële leerstof mist. Hiervoor kan men op twee manieren zorgen:

1e men splitst de leerstof in basisstof en ekstra stof, waarbij men er vanuit gaat dat de zwakke leerling tenminste de basisstof op een bevredigende manier verwerkt.
2e men vertrekt in het tweede leerjaar niet vanuit het punt waarop men in het brugjaar de leerstof beëindigd heeft, maar men behandelt het hele onderwerp (wel in een wat vlugger tempo) weer van het begin af.
Op die manier kan men het goed doorwerken van de basisstof voldoende zeker stellen. En dat houdt in, dat een eindeksamen dat op de basisstof is samengesteld door vrijwel alle leerlingen redelijk kan worden gemaakt. Dit is een bevredigende uitkomst: leerlingen die alle jaren zich hebben ingespannen voor wiskunde, kunnen tenminste op het laagste nivo eindeksamen doen.
Voor velen zit het eksamen op het hoogste nivo er ook wel in. Dikwijls zijn de opgaven voor het B-nivo interessanter en dat heeft een positief effekt op het resultaat. Als men in de brugklas leerlingen vragen geeft op twee nivo's, dan komt het dikwijls voor dat leerlingen voor de vragen van het hoogste nivo een

hogere skore maken dan voor die van het laagste nivo. Men mag er dus niet vanuit gaan dat men in het tweede leerjaar leerlingen heeft die elk de leerstof tot op een bepaald nivo beheersen. Soms beheersen zij moeilijke leerstof wél en basisstof niet. Vandaar mijn advies onder 2e hierboven.
Het lijkt mij zeer ongewenst dat men de leerlingen – ook maar in gedachten – zou splitsen naar de twee nivo's. Ik spreek mij niet uit tegen proefwerken die naar twee nivo's beoordelen, maar laat alle leerlingen aan hetzelfde proefwerk deelnemen en men kan dan nog heel vreemde kombinaties verwachten: A-nivo onvoldoende, B-nivo voldoende. Er kan gerust klassikaal les gegeven worden, wanneer dit nodig is. Toelichting op de basisstof is voor alle leerlingen noodzakelijk en toelichting op de ekstrastof zal ook door de meeste leerlingen op prijs worden gesteld. Ik zie niet in, waarom deze ekstrastof zo ekseptioneel zou moeten worden samengesteld. Ook leerstof samengesteld door het I.O.W.O. kan voor zwakke leerlingen beter aanslaan dan de basisstof, dus de zwakke leerlingen mogen daarvan niet gespeend blijven.
De bijlagen proberen aan de docenten duidelijk te maken, hoe er individueel zou kunnen worden gewerkt. Natuurlijk is het bij ieder onderwijs van belang dat er een ruime plaats aan het individuele werk wordt ingeruimd. Ik hoop, dat men zal begrijpen, dat de bijlagen slechts voorbeelden zijn. Voor het samenstellen van funkties zijn er veel metoden om individueel te laten werken, zelfs heel abstrakte, en zelfs die werken na een goede mondelinge toelichting behoorlijk.
Het lijkt me wel gewenst, dat men zich er goed op bezint, wat nu eigenlijk basisstof is. De uitwerking van $(2a + 3b)^2$ is een opeenstapeling van zéér veel bewerkingen die heel moeilijk in hun totaliteit doorzien worden. Hier wordt een ingewikkelde kunst ingestudeerd en men mag niet zeggen dat een leerling die daartoe in de brugklas niet in staat is ongeschikt is voor het werken in de tweede klas. Dit onderwerp behoort dus niet tot de basisstof van de brugklas.

Euclides

Maandblad voor de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van de Nederlandse
Vereniging van Wiskundeleraren

55ste jaargang 1979/1980

Wolters-Noordhoff bv Groningen

Inhoud van de 55ste jaargang 1979/1980

ARTIKELEN

KORRELS

THEMANUMMERS

BOEKBESPREKINGEN

DIVERSEN

Wiskundigen, let op uw Nederlands

PROF. DR. N. G. DE BRUIJN

1 *Inleiding.* De voorafgaande stukjes over WOT (= Wiskundige Omgangstaal) hadden het vooral over het samenspel tussen woorden en formules (Wees contextbewust in WOT, Euclides, 79/80 blz. 7; Grammatica van WOT, Euclides, 79/80, blz. 66; Van alles en nog wat over gebonden variabelen, Euclides 79/80, blz. 262).
Dat is nu minder de bedoeling; we zullen het meer hebben over het gebruik van het gewone Nederlands in de wiskunde, en over de voetangels en klemmen die daarin liggen. We doen dat in een aantal opmerkingen met weinig samenhang en nogal variërende diepgang.

2 *Foutieve zinsbouw.* In het wiskundig Nederlands worden vaak dezelfde fouten gemaakt als in het gewone Nederlands. 'Door $x = 5$ te nemen blijkt dat $c > 2$'. De constructie met 'door te . . .' eist dat het weggemoffelde onderwerp van het eerste stuk (bijv. 'we' in 'we nemen $x = 5$') tevens onderwerp van de hoofdzin ('er blijkt dat $c > 2$') is, en dat is allerminst het geval. Vergelijk: 'Door de deur van slot te laten kon de hond ontsnappen'. Verbeterde vormen: 'Door $x = 5$ te nemen zien we in dat $c > 2$'. 'Doordat de deur van slot gelaten was kon de hond ontsnappen'. 'Door de deur van slot te laten gaf ik de hond gelegenheid te ontsnappen.'

3 *Taal en metataal.* In het wiskundige taalgebruik is er meestal een scheiding aan te brengen tussen de echte wiskundige taal (WOT) en de taal waarmee we over die wiskundige taal of over het wiskundige bedrijf spreken. Vermenging van taal en metataal is onduidelijk, lelijk en gevaarlijk.
Een afschrikwekkend voorbeeld: 'Als je voor π de waarde 22/7 mag nemen, heeft een cirkel met straal 7 de omtrek 44.' De tweede helft van de zin is taal, de eerste metataal, want het zegt iets over de bereidwilligheid waarmee de meester een oppervlakkigheid van de leerling door de vingers ziet: een ingewikkelde gedachtenkronkel overigens. Als je voor π de waarde 22/7 mag nemen kan je voor de omtrek evengoed $44 + 5000\ (7\pi - 22)$ krijgen, en dat getal is negatief, al 'mag' je het dan ook als positief beschouwen. Er komt geen eind aan dit soort onzin.
Niet alle vermenging van taal en metataal willen we uitbannen. Een wiskundige zin kan bijzin zijn in een hoofdzin die bewijsaanduiding aandraagt. 'Door . . . zien we dat $a > b$'. Op de stippeltjes kan staan bijv. 'stelling 5 toe te passen',

'voor x het getal 2 in te vullen', 'goed over de figuur na te denken'. Bij al deze zinnen is de mededeling $a > b$ correct, ook onafhankelijk van onze overwegingen. Dat was met die omtrek 44 niet het geval!
Nog een stijlbloempje (het gaat over de formule $y = 3x^2 - 2$). 'Als we voor x het getal 3 invullen, is $y = 25$' is een vermenging van taal en metataal. Het wekt de indruk dat wiskundige waarheden van ons gedrag afhankelijk zijn. Beter is de metataalzin 'Als we voor x het getal 3 invullen gaat de betrekking over in $y = 25$'.
Irritant is het woord 'oplossing' dat zowel in taal als in metataal gebruikt wordt, met sterk verschillende betekenissen.

4 *Meervoudige interpretaties.* Probeer zinnen steeds zo te stellen dat ze alleen op de door de schrijver bedoelde wijze zijn terug te lezen. Een gruwelijk voorbeeld: 'Piet heeft veel ervaring, maar ik ken meer op dit onderwerp gespecialiseerde wiskundigen'. Een paar betekenissen: (1) ik ken er meer dan Piet, (2) ik ken er die het meer zijn dan Piet het is, (3) de wiskundigen die ik ken zijn meer op dit onderwerp gespecialiseerd dan de wiskundigen die Piet kent, (4) Piet is een o.d.o.g.w. maar ik ken ook nog andere o.d.o.g.w.'s, (5) Piet kent g.w.'s, maar degene die ik ken specialiseerden zich meer o.d.o., (6) ik ken g.w.'s die meer o.d.o. gericht zijn dan Piet dat is.

5 *Volgorde binnen een zin.* In het Nederlands kunnen vele zinnen wat volgorde betreft omgegooid ('geïnverteerd') worden. De zin 'ik zie hem morgen' staat in de gewone volgorde, met het onderwerp voorop, maar kan worden geïnverteerd tot 'morgen zie ik hem', en tot 'hem zie ik morgen'. Inversie kan aan een zin een andere kleur geven, vooral doordat andere zinsdelen worden benadrukt. Een voorbeeld hebben we bij implicaties. De zin 'q is positief als $p > 1$' heeft een andere klank dan de geïnverteerde zin 'als $p > 1$ is q positief'. De geïnverteerde zin wordt duidelijk als implicatie opgevat: $(p > 1) \Rightarrow (q > 0)$. De niet-geïnverteerde zin zaait twijfel, want deze vorm wordt ook wel gebruikt om gelijkwaardigheid $(p > 1 \Leftrightarrow q > 0)$ uit te drukken.
Denk maar eens aan het gebruik bij definities als 'driehoek PQR heet gelijkzijdig als $PQ = QR = RP$'.
Het is sterk aan te raden implicaties steeds de vorm 'als A dan B' te geven (het woordje 'dan' kan vaak achterwege blijven), al was het alleen maar om dezelfde volgorde als die bij $A \Rightarrow B$ aan te houden.

6 *Samentrekking.* In het Nederlands kunnen vaak twee zinnen tot één kortere worden samengetrokken. 'Ik heb een boek van Hardy' en 'ik heb een boek van Littlewood' kunnen worden samengetrokken tot 'ik heb een boek van Hardy en een boek van Littlewood' maar niet verder tot 'ik heb een boek van Hardy en Littlewood'. Hoever wel en hoe ver niet meer kan worden samengetrokken, is niet alleen een kwestie van taalkunde en logica, maar ook van andere conventies. 'Jan en Kitty zijn getrouwd' betekent vaak dat Jan met Kitty getrouwd is, maar wanneer een moeder over haar volwassen kinderen spreekt bedoelt ze iets anders.
Uit deze voorbeelden is duidelijk dat het in de wiskunde met samentrekkingen

oppassen geblazen is. 'Als A dan C' en 'Als B dan C' gaan samen nog wel tot 'Als A en als B dan C', maar het gaat niet verder tot 'Als A en B dan C'. O schrik, het wordt 'Als A of B dan C'. Is het verwonderlijk dat we met omzetting van 'en' en 'of' naar conjunctie en disjunctie grote moeite hebben?
Vraag: voor welke u is $u^2 = pu$? Sommigen antwoorden: 'als $u = 0$ of $u = p$', 'als u nul of p is', maar anderen zeggen 'als $u = 0$ en als $u = p$', 'oplossingen $u = 0$ en $u = p$', 'oplossingen 0 en p'. Het is allemaal niet erg, zolang je maar niet automatisch 'en' door $\wedge$, 'of' door $\vee$ vertaalt. Maar in deze chaos is het geen wonder dat velen grijpen naar de houterige vraag 'wat is de oplossingsverzameling van $u^2 = pu$?' Zelfs deze vraag is nog niet goed gesteld, want wie zegt dat u de onbekende is en niet p? Beter gewoon 'Los u op uit $u^2 = pu$', met de afspraak dat 'oplossen' betekent 'oplossingsverzameling aangeven'.

7 *Populaire taal.* Pas ermee op: populaire taal is vaak minder beveiligd tegen dubbelzinnigheid dan 'nette' taal, en het mengsel van beide talen is nóg gevaarlijker. Schrijf bijvoorbeeld niet 'het paar getallen dat . . .' i.p.v. 'de weinige getallen die . . .'.
Ook bij meer officiële taal kunnen zulke dubbelzinnigheden optreden. Bijv.: 'Deze functies hebben verschillende afgeleiden'. Betekent dit het oppervlakkige 'ze zijn een stuk of wat keren differentieerbaar'?

8 *Ouderwetse taal.* In het wat oudere geschreven wiskundig Nederlands, (maar ook in het huidige gesproken wiskundig Nederlands) vindt men mysterieuze woorden als zeker, bepaald, gegeven, onbepaald, vast, veranderlijk, willekeurig, bekend. Meestal zijn zulke woorden bedoeld om de slecht zichtbare contextstructuur met suggestieve termen te draperen. Als bij een limietdefinitie achteraan hangt 'en hierin is ε willekeurig' dan is wel duidelijk dat er een al-kwantor in had gemoeten, maar de plaats daarvan blijft duister. Iets soortgelijks geldt voor 'zekere x' als aanduiding van existentie. De meeste van deze mysterieuze woorden zijn schijnadjectieven: ze zijn gehecht aan bijv. een letter x terwijl ze in feite op een gehele situatie slaan. Zo is bijv. de mededeling dat 'x een gegeven getal is' op te vatten als de aanwijzing dat men bij de beantwoording van vragen niet buiten de context van de variabele x behoeft te treden. M.a.w. het is de opdracht: 'druk alles in x uit'. Of ook: 'beschrijf wat je zou doen als x werkelijk gegeven was'.
Een voorbeeld van geheel zinloos gebruik van het woord 'gegeven' is: 'Stelling. Voor elke rechthoekige driehoek ABC (met rechte hoek in C) is c gegeven door $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.'

9 *Lopen.* Wiskundige taal was vroeger sterk kinematisch gekleurd. Als x een reële variabele was zei men: 'x loopt van $-\infty$ naar $+\infty$'. Ook zei men dat van sommatieindices. De moderne wiskundige taal is statischer. Toch blijven er zinswendingen in leven als 'Als x naar oneindig gaat, gaat e^{-x} naar nul'. Het 'lopen' van x staat een goed inzicht in het begrip 'variabele' in de weg. Een letter heet een variabele als we het recht hebben er dingen voor te substitueren. Voor een winkelbedrijf is 'de klant' een variabele, die voorkomt in zin-

nen als 'elke klant heeft recht op een gratis stuk zeep'. Hiervoor kan bijv. mevrouw Jansen worden ingevuld. Dat mevrouw Jansen 'loopt' en misschien een beetje 'verandert' heeft hier niets mee te maken.

10 *Waarde*. Ook dit woord behoort grotendeels tot het ouderwetse taalgebruik. Is er verschil tussen p en de waarde van p? Wanneer gebruiken we eigenlijk het woord 'waarde', en is er reden om dat gebruik af te schaffen?
De overbodigheid van het woord 'waarde' blijkt uit het feit dat men het alleen bij getallen gebruikt. Bij punten gebruikt men nog wel iets dat er op lijkt (de plaats van P, de ligging van P) maar bij moderner wiskundige begrippen is er niets van terug te vinden. Men spreekt bijvoorbeeld rustig over de elementen ven een groep en nooit over de waarde van een element.
Soms probeert men het woord 'waarde' te gebruiken om verschil tussen taal en metataal aan te duiden. Men spreekt in de metataal over 'de letter p' en in de taal over 'p' of 'het getal p'. En men bedoelt de laatste twee als men 'de waarde van p' zegt. Een verschil tussen 'p' en 'de waarde van p' is niet te bespeuren.
Het woord 'waarde' komt in allerlei samenstellingen voor. 'We geven aan x de waarde 3' betekent 'we vervangen x door 3'. En 'voor elke waarde van x' betekent hetzelfde als 'voor elke x'.
Soms zegt men 'geef nu aan x een bepaalde waarde', zonder te zeggen welke. Hiermee wordt dan ook niet veel gezegd. Het betekent een soort geruststelling: voorlopig zullen we de x-context niet verlaten. Wat ingewikkelder is het wanneer eerst een variabele x en dan een variabele y wordt ingevoerd, en tenslotte aan x 'een bepaalde waarde' wordt gegeven.
Er is ook een soort *substantief* 'waarde van x' en dat is niet hetzelfde als de *naam* 'de waarde van x'. Dat substantief wordt gebruikt om te wijzen op het domein waartoe de variabele x bij de introductie werd beperkt. Met 'waarde van x' wordt dan bedoeld 'getal uit dat domein'. Men zegt bijv. 'twee waarden van x'. Tegen dit substantief geldt het bezwaar dat de x hier metataal is. Het is dan ook veiliger om te spreken over een 'waarde van de letter x'.
Erg verwerpelijk is: 'voor elke waarde van het reële getal x', want dat geeft het misverstand dat een variabele iets is dat al maar verandert. 'Het reële getal x' is in WOT de naam van een wiskundig object, en daarbij past de term 'waarde' niet. Wèl acceptabel zou misschien zijn: 'voor elke waarde van de reële variabele x'. Maar waarom zouden we dit zeggen? 'Voor elke reëel getal x' is korter, hoewel ook niet geheel zonder bezwaar (zie §11).
Ook een zin als 'nu heeft x de waarde 5' is gemakkelijker zonder 'waarde' te formuleren.
Iets heel anders dan 'waarde van de letter x' is het substantief 'waarde van de functie f' in de betekenis 'element van het beeld van f'. Ook de naam 'de waarde van f in het punt a' levert geen moeilijkheid; in gesproken taal is dit prettiger dan '$f(a)$' omdat die haakjes zich zo lastig laten uitspreken.
Afgezien van dit gebruik bij functies zouden we moeten proberen om de wiskunde (om een modekreet te gebruiken) *waardevrij* te maken (maar niet waardeloos).

11 *Een x*. Dit is iets vreemds. In het algemeen wordt x als een *naam* gehan-

teerd, maar op andere plaatsen is het plotseling een substantief: 'elke x' 'tenminste één x', 'twee x-en', 'de x met . . .'. In deze gevallen betekent het namaak-substantief x hetzelfde als het substantief 'waarde van de letter x' dat in §10 werd genoemd.

Laten we proberen dat substantievelijke gebruik van x terug te drukken. Op een paar plaatsen zal het wel een hardnekkig leven leiden, bijv. bij het uitspreken van subscripten van kwantoren. We kijken even naar dit laatste, met als voorbeeld

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} x^2 > -1.$$

In de natuurlijke taal kunnen we zonder gebruik van x zeggen 'voor elk reëel getal geldt dat zijn kwadraat groter is dan -1', maar als $x^2 > -1$ wordt vervangen door $(x^4 + x^3 - x^2 - x + 1)^2 > -1$ krijgen we aardig de hik van de betrekkelijk voornaamwoorden. De wiskundige kan die x niet goed missen, maar heeft moeite met het uitspreken in natuurlijke taal. Redelijk Nederlands, hoewel langademig, is: 'voor elk reëel getal geldt, als zo'n reëel getal door x wordt voorgesteld, dat $(x^4 + x^3 - x^2 - x + 1)^2 > -1$'. Als je dit doet in een geval met enkele kwantoren achter elkaar, rijst het de pan uit. In het Engels gaat het zo aardig met 'for every real number, x say, we have . . .'. We kunnen dat in het Nederlands rustig overnemen: 'voor elk reëel getal, zeg x, geldt dat . . .'. Wat meer in telegramstijl schrijven we: 'voor elk reëel getal (x) geldt dat . . .'. In een volgend stadium laten we die haakjes om de x ook nog weg, en nu lijkt het ineens of 'reëel getal x' een substantief is geworden, want waar zou die x anders bij kunnen horen? Om dit laatste misverstand bij leerlingen weg tenemen is het goed eerst de meer correcte langademige formuleringen te gebruiken, en daarna pas de korte.

Bij dit voorbeeld met $\mathbb{R}$ hadden we het substantief 'reëel getal' ter beschikking. Hoe nu met bijv. $\forall_{x \in A}$? Zeg dan maar: 'voor elk element (x) van A geldt . . .'.

12 *Moeten*. Alle waarheid is gedwongen, alleen de leugen is vrij. Het gebruik van het woord 'moet' om de waarheid te onderstrepen is dus overbodig (zoals 'als $x > 5$ is dan moet $x > 0$ zijn'). Soms is het gevaarlijk, omdat het zo dicht komt bij verplichtingen die worden opgelegd aan de lezer en niet aan de mathematische objecten. 'Om de convergentie te bewijzen moeten we . . .'. In zulke gevallen speelt mee over welke hulpmiddelen we geacht worden te beschikken! Soms staat een slordig gebruik van 'moeten' dicht bij het verwarren van een implicatie $A \Rightarrow B$ met zijn omgekeerde $B \Rightarrow A$. Zoiets als: 'Ik moet B bewijzen. De enige stelling daarover zegt $A \Rightarrow B$. Wil dus B dan moet A'. Dit laatste kan voortkomen uit de volgende gedachtenkronkel: 'Men wil mij B laten bewijzen. Om dat te doen ga ik mezelf de plicht opleggen A te bewijzen'.

13 *Mogen*. 'Wij mogen aannemen dat . . .'. Dit is een ingewikkelde aangelegenheid. De situatie is als volgt. We willen B bewijzen, en we zeggen dat we A 'mogen aannemen'. Dit kan bijv. doordat A en B met parameters behept zijn. Laat $A = A(x)$, $B = B(x)$ en laat er bij elk getal x een getal y zijn met

$A(y) \wedge (B(y) \Rightarrow B(x))$. Om nu $\forall_x B(x)$ te bewijzen is het voldoende om $\forall_x(A(x) \Rightarrow B(x))$ aan te tonen. Voorbeeld: neem voor $B(x)$ de uitspraak $x^4 + 1 \geqq x$, voor $A(x)$ de uitspraak $x \geqq 0$, en neem $y = |x|$.

14 *Betekenen.* Een zin als 'Dit betekent dat wij schade lijden' is een soort implicatie. Gebruik in de wiskunde het woord 'betekenen' liever niet op die manier. Gebruik 'A betekent B' in de betekenis 'A wordt, is of was gedefiniëerd als B', desnoods nog als '$A \Leftrightarrow B$' maar niet als $A \Rightarrow B$.

15 *Het grootste deel.* 'A, B, C verdelen een koek. A krijgt het grootste deel'. Pas op en zeg liever 'A krijgt het meest'. Soms bedoelt men nl. met 'het grootste deel': 'meer dan de helft'.

16 *Telwoorden.* Bij een woord als 'twee' is het vaak niet duidelijk of het taal dan wel metataal is. 'Twee verzamelingen A en B voldoen aan . . .' bedoelt meestal niet $A = B$ te verbieden! In zulke gevallen is het metataal en het betekent: de twee letters A en B laten we verzamelingen voorstellen. 'Twee' slaat op het aantal letters en niet op het aantal verzamelingen. In de volgende opgave is het anders bedoeld: 'Twee personen A en B verdelen honderd gulden. A krijgt evenveel als B. Hoeveel krijgt A?' Niemand zal rekenen op het antwoord 'honderd gulden als $A = B$, en anders vijftig'.
Minder duidelijk is het bij 'twee evenwijdige lijnen'. 'Evenwijdig' is geen echt adjectief bij 'lijn', maar hoort bij 'lijnenpaar', en dat heet in de wandeling 'twee lijnen'. Hoe recht de lijnen ook zijn, taalkundig is het krom.
Er wordt vaak vreemd met telwoorden omgesprongen. In een schoolboek lazen we: 'De diagonalen van een rechthoek verdelen elkaar in 4 gelijke delen'. Deze constructie betekent in het Nederlands dat de eerste diagonaal de tweede in 4 gelijke delen verdeelt, en omgekeerd. Men vat 'Jan sloeg Piet en Piet sloeg Jan' ook niet samen in 'Jan en Piet gaven elkaar twee klappen'.

17 *Doorschrift.* Deze spottende benaming duidt de stijl aan waarbij formules zó achter elkaar geplakt worden dat steeds de staart van een formule tegelijk als kop van de volgende fungeert. Dat dit moeilijkheden bij zinsontleding geeft wordt duidelijk als we het in gewoon Nederlands proberen: 'Jantje schopte Pietje liep huilend naar mamma gaf Pietje een koekje werd direct door Pietje opgegeten'.
Geaccepteerd doorschrift is $a = b = c$ met de bedoeling $a = b$ en $b = c$ te zeggen, en meestal tegelijk op $a = c$ te wijzen. Het betekent dat '$a = b$ en $b = c$ dus $a = c$'. Iets dergelijks doet men met $a \geqq b > c$. Zinsontleding geeft hier geen moeilijkheden. Er is overigens ook geen last met zinsontleding bij $a > b \leqq c$, hoewel dat bij menigeen de griezels over de rug doet lopen.
Een afkeurenswaardig modeverschijnsel is het doorschrift met implicatiepijlen $A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow D$ om aan te duiden '$A \Rightarrow B$, en $B \Rightarrow C$, en $C \Rightarrow D$'. Het heeft het voordeel van de transiviteit (zoals bij $=$ en bij $>$) maar er is een ontledingsmoeilijkheid: Als A, B, C proposities zijn dan zijn $A \Rightarrow B$ en $B \Rightarrow C$ het ook, en daarom hebben ook $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ en $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$ betekenis. Wat moet nu $A \Rightarrow B \Rightarrow C$ voorstellen?

Lelijk, maar niet onoverkomelijk. Veel erger is dat men (en dat geldt voor veel schoolgebruik) $A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow D$ schrijft en die serie '$A \Rightarrow B$ en $B \Rightarrow C$ en $C \Rightarrow D$' helemaal niet bedoelt. Wat men bedoelt is: A, dus B, dus C, dus D. En om bijv. D te concluderen mogen behalve C ook best A en B gebruikt worden, en eerder opgedane kennis ook nog wel. Met de implicatie $C \Rightarrow D$ heeft het weinig te maken! En wie zich eenmaal aangewend heeft om het pijltje als 'dus' te lezen, kan moeilijk leren wat nu eigenlijk een implicatie is.
Vroeger hadden we het teken $.^{\cdot}.$ voor 'dus' in gebruik, maar het schijnt dat de een of andere commissie dat uitgebannen heeft, naar ik hoorde omdat $.^{\cdot}.$ symmetrie zou suggereren. Op dezelfde gedachte doorgaande had men ook het minteken door $\rightarrow$ moeten vervangen!
Doorschrift is meestal luiheid. Nog wat voorbeelden: 'Voor elke $x > y + 1$ is . . .' 'Nu is $b = \sin 72°$ het enige getal met . . .'. 'Omdat p het kwadraat van $a = c + 1$ is, . . .'. Schoolleerlingen ziet men wel schrijven $3 \times 5 = 15 + 2 = = 17 - 8 = 9$. Dit kan wel in gesproken taal, want dan werken adempauzes als scheidingstekens. Ook kan men het zien als de conversatie met een rekendoosje: alles wat direct rechts van een gelijkteken staat wordt door het doosje geleverd, de rest door de bediener.

18 *Nodig en voldoende.* Wie deze woorden gebruikt, realiseert zich niet altijd wat het allemaal in de argeloze lezer kan losmaken. Het staat in verband met de metataaluitdrukkingen 'nodige voorwaarden', 'voldoende voorwaarde'. Zeg in plaats van 'Nodig en voldoende opdat A is dat B' liever 'A is gelijkwaardig met B' of 'als A dan B en omgekeerd'.
Het 'dan en slechts dan A wanneer B' is onnatuurlijk omdat de component 'slechts dan A wanneer B' lelijk Nederlands, en de component 'dan A wanneer B' geen Nederlands is. Wèl Nederlands, maar ongebruikelijk, zijn 'A als en alleen als B', 'A als B en alleen dan'.
Spreek in geen geval over 'de' nodige en voldoende voorwaarde. Het bepaalde lidwoord 'de' is misplaatst.

19 *Eenduidig bepaalde objecten.* Zeg nooit: 'er is een eenduidig bepaalde $x \in A$ met $B(x)$'. Dat 'eenduidig bepaalde' hoort niet bij x maar bij het predikaat B. Zeg liever 'de voorwaarde $B(x)$ bepaalt x eenduidig in A'. De bedoeling is meestal dat deze letter x ook verder gebruikt gaat worden. Er gebeuren dan eigenlijk verschillende dingen tegelijk, nl. '$\{y \in A \mid B(y)\}$ heeft precies één element. Noem dat x'.

20 *Terminologie kiezen.* Wie een adjectief kiest om een wiskundige eigenschap uit te drukken moet niet naar overbelaste woorden grijpen. Er zijn nogal wat adjectieven die ook gebruikt kunnen worden om onze eigen relatie tot een wiskundig object aan te duiden, zoals bij: een gewone functie, een bekende reeks, een lastige betrekking, een triviale oplossing, een gecompliceerde afbeelding, een onbekende constante. Het moet worden afgeraden zulke algemene adjectieven voor één wiskundig begrip te reserveren. Op oningewijden komt dat vaak verkeerd over: een gewone differentiaalvergelijking, een bijzondere oplossing, een normale ondergroep, de bekende term, een regelmatige kettingbreuk.

Wiskundeonderwijsontwikkelingsonderzoek

JOH. H. WANSINK

Naar aanleiding van:
Fred. Goffree, *Leren onderwijzen met wiskobas*;
onderwijsontwikkelingsonderzoek;
'Wiskunde en Didaktiek' op de pedagogische akademie; 447 blz., 1979.
Uitgave van het Instituut voor Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs te Utrecht.

1 Dit proefschrift ter verkrijging van de graad van doctor in de sociale wetenschappen werd op 14 september 1979 door Goffree verdedigd. De voltooiing van dit werk betekent een nieuwe en belangrijke stap op weg naar een didactiek der wiskunde. Als vroegere stappen noemen we: Freudenthal's '*Mathematik als pädagogische Aufgabe*' (Euclides 50, 403-411) en Treffers's dissertatie: '*Wiskobas doelgericht*' (Euclides 55, 2-6).

Het heeft in dit verband wellicht zin erop te wijzen dat Freudenthal bij herhaling en categorisch het bestaan van een wetenschappelijk verantwoorde wiskundedidactiek heeft ontkend. Zijn jongste werk: '*Weeding and sowing*' droeg dan ook de ondertitel '*Preface to a science of mathematical education*'. En hij constateerde daarin (p. 170): 'There is no science of mathematical education. Not yet. Again, there are many marvellous activities - educational engineering in mathematics - sources from which a science of mathematical education may spring'.
Tot dit belangrijke pionierswerk reken ik ook het fundamentele onderzoek waarover Goffree in zijn proefschrift rapporteert.

De titels van de opvolgende hoofdstukken zijn:
I *Tussen rekenkunde en didaktiek*
II *In het kader van Wiskobas*
III *Wiskobas op de vierkante meter*
IV *Leren onderwijzen met Wiskobas*
V *Wiskobas buiten de grenzen*
Een summary en een overzicht van geraadpleegde literatuur (met meer dan 300 titels) besluiten het geheel. Ruim 70 bladzijden 'noten' zijn separaat toegevoegd.

2 In het eerste hoofdstuk schetst de auteur uitvoerig de situatie op de kweekscholen in de jaren 1923–1958. In 1923 kwamen er schoolexamens en het examenprogramma vermeldde alleen de leerstof voor 'rekenen en wiskunde', niets over de didactiek voor rekenen op de lagere school. De wiskundedocent heeft tot 1953 geen officiële bemoeienis met die rekendidactiek; de zorg hiervoor blijft ressorteren onder de taak van de leraar opvoedkunde.
Met de kweekschoolwet van 1952 zou zich op macroniveau een revolutie gaan voltrekken. 'Op mikronivo werd het overschakelen naar de didaktiek van het rekenen aan de leraren overgelaten', aldus Goffree (p. 42). In de leerstofomschrijving werd voorts de term 'rekenen' door 'wiskunde' vervangen.
Goffree laat duidelijk uitkomen dat men met het geven van efficiënte didactische informatie op de pedagogische academies (de p.a's) ternauwernood raad wist: de opleiders waren er niet voor opgeleid. De filosofie die ten grondslag lag aan het oude rekendidactiekonderwijs was die van het gangbare wiskundeonderwijs, en deze filosofie was niet in staat gebleken het rekenonderwijs op de basisschool adequaat te funderen.
Tot in de zestiger jaren waren het uitsluitend twee aspecten van het rekenonderwijs geweest die voldoende naar voren kwamen: de technieken van het hoofdrekenen en van de in te oefenen algoritmen. Het leerproces van de basisschoolleerlingen stond nog onvoldoende in de belangstelling, de didactische problematiek ervan werd onvoldoende onderkend.
Over de sfeer van het oude kweekschoolonderwijs en over de erin gebruikte leerboeken verschaft Goffree ons uitvoerige en betrouwbare informatie.

3 Dat ook 1968 een markeringspunt zou worden in de geschiedenis van de rekendidactiek, vergelijkbaar met 1952, is niet toe te schrijven aan wettelijke voorschriften, maar aan nieuwe inzichten die dank zij het werk van de *CMLW* nadat *Wiskobas* erin was opgenomen, ingang vonden. Dit leidde op de tot pedagogische academie getransformeerde kweekschool tot een nieuwe oriëntering, waarbij niet langer gestreefd werd naar partiële herzieningen in het historisch gegroeide, maar uitgezien werd naar een principieel andere instelling. In plaats van te blijven 'wieden' op de didactische akkers overwoog men een 'kaalslag' op dit terrein, om dan daarna volgens nieuwe ideeën te gaan 'zaaien'.
Reeds in 1968 worden er vanuit de gelederen van de 'kweekschooldidactici' een vijftiental regionale wiskobaswerkgroepen gevormd. Het standpunt dat wordt ingenomen ten aanzien van de te behandelen leerstof wordt slechts ten dele gekarakteriseerd door de vervanging van de term 'rekenen' door 'wiskunde'. Het is vooral de combinatie 'wiskunde en didactiek op de basisschool' waarvan de problematiek zal worden onderzocht. Dit geeft spoedig aanleiding tot een brede scala van nieuwe studie-onderwerpen (p. 77), waarbij ook een eigen standpuntbepaling noodzakelijk wordt voor de al te grote invloed die van de 'new maths' dreigt uit te gaan. Wiskunde en didactiek, aanvankelijk nog onderwezen in een wiskundige context, worden na een conferentie van p.a.-leraren in 1974 onderwezen in een didactische context. Niet de stof is langer primair, wel de weg waarlangs basisschoolleerlingen geëigende problemen van wiskundige aard kunnen leren begrijpen.

De problematiek van de onderwijsontwikkeling komt in de aandacht, met als componenten: leerplanontwikkeling, veranderingssteun van de kant van de CMLW-medewerkers aan de p.a.-docenten en een nader onderzoek in de onderwijspraktijk van de door de leerplanontwikkelaars ontworpen ideeën. Goffree zelf maakte in deze periode vanaf 1968 een ontwikkeling door van p.a.-docent tot leerplanontwikkelaar.

Van grote betekenis zijn reeds in deze periode de activiteiten in en rondom de Dr. W. Dreesschool te Arnhem, de ontwerpschool waar sinds 1973 de ontworpen 'wiskobasspullen' worden besproken en in de klassepraktijk worden getoetst. Dat hierbij nieuwe werkvormen tot ontwikkeling kwamen die het frontaal gegeven rekenonderwijs van weleer konden doorbreken, ligt voor de hand.

Ten aanzien van de interrelatie tussen theoretische scholing en de onderwijspraktijk van de studenten aan pedagogische academies is het jaar 1975 in de ontwikkeling van Goffree's ideeën belangrijk geworden: in dat jaar kwam er namelijk in Gorkum belangrijke team-arbeid tot stand. Twee wiskobasmedewerkers te samen met een leraar pedagogiek en twee leraren wiskunde begonnen hier met ontwikkelingswerk ten bate van de didactische scholing van de p.a.-studenten. Ook een twintigtal mentoren, onderwijzers aan oefenscholen in en rondom Gorkum werden bij dit experiment ingeschakeld. Zo kwam er een didactische context tot stand voor onderwijs in 'wiskunde en didactiekonderwijs' in de onderwijzersopleiding.

4 In hoofdstuk III legt de auteur uit, dat men na aanvankelijk bezig geweest te zijn met het ontwerpen en uitproberen van langdurige leerprocessen zoals die bijvoorbeeld bij het inoefenen van cijferalgoritmen voorkomen, men het toch gewenst oordeelde voor de eerstejaarsstudenten om te gaan zien naar korte, overzichtelijke problemen. De vakinhoud werd daarbij beperkt tot 'meetkunde en tellen', aan de mathematische vakkennis werden slechts geringe eisen gesteld. Aan de hand van het project '*Waterland*' demonstreert de auteur de bruikbaarheid van zulk eenvoudig materiaal. Vanwege de opgelegde beperkingen spreekt de auteur over '*wiskobas op de vierkante meter*', de titel van het derde hoofdstuk.

5 Het vierde hoofdstuk draagt dezelfde titel als het proefschrift, maar met de ondertitel '*observaties en analyses*'. Het vormt de kern van Goffree's onderzoek, waaraan het Gorkums werk uit de jaren 1975–1976 ten grondslag ligt. De bruikbaarheid van het in de voorafgaande jaren bijeengebrachte materiaal wordt getoetst. Daarbij werd gezocht naar het scheppen van een geschikte terminologie ten dienste van het zien, doordenken, bespreken en voorspellen van mathematisch-didactische fenomenen met het oog op de mogelijkheid tot reflectie en leren, tot het toegankelijk maken voor theorie of tot de vorming van een uitgangspunt daartoe (p. 192).
Het is te hopen dat bij de verdere ontwikkeling van zo'n terminologie de gevaren van een dreigende wildgroei tijdig zullen worden onderkend en bezworen!

In dit nieuwe Gorkumse onderzoek vervulde Goffree de dubbelrol van p.a-docent en onderzoeker. Ondanks de bezwaren die tegen deze dubbelfunctie kunnen worden ingebracht is dit actief-participerend verbonden zijn van de onderzoeker in een experiment als het onderhavige volgens Goffree voorwaarde tot het verkrijgen van voor de onderwijspraktijk bruikbare gegevens.
In dit voor de didactisch geïnteresseerde lezer boeiende vierde hoofdstuk brengt de auteur uitvoerig verslag uit over de didactische houding die de student in zijn oefenlessen heeft weten aan te nemen ten aanzien van de geprefabriceerde wiskobasspullen. Belangrijk wordt dit hoofdstuk door het uitvoerig commentaar uit de logboeken van de studenten, door de rapportage over de begeleiding van de lessen in voor- en nabespreking, door de inbreng van de mentoren en door de interventies van Goffree en Freudenthal waarvan ook de laatste een deel der lessen heeft bijgewoond.

6 In zijn conclusies komt Goffree tot het schetsen van een totaalbeeld van zijn 'onderzoekingsuitkomst'. Centraal staan hierbij een tiental mathematisch-didactische aangrijpingspunten (points of impact), waarin de aandacht wordt gevestigd op fundamentele leerprestaties. Goffree rubriceert ze onder de volgende titels:

1 konteksten
2 instapproblemen
3 materiaalproblemen
4 kernvragen
5 bewustmakingspunten
6 konkretiseren
7 uitleggen
8 de bedoeling
9 basis van oriëntering
10 centrale aandacht voor wiskundige activiteiten

Goffree constateert dat het mogelijk is gebleken aan de hand van deze punten in het Gorkumse onderzoek de lessen in de oefenschool van de aan zijn zorg toevertrouwde studenten vruchtbaar te begeleiden: de studenten bleken alle 'points of impact' tot hun recht te kunnen laten komen. De punten vormen echter geen logisch samenhangend geheel van beoordelingscriteria. In hoeverre de lijst niet alleen in handen van de p.a.-docent, maar eveneens in die van de p.a.-student efficiënt gebruikt zal kunnen worden is nog een open vraag.

De conclusies over de bruikbaarheid van de points of impact berustte nog op 'internal evidence'. Voor een algemenere aanvaarding van zijn onderzoeksresultaat zocht Goffree naar de mogelijkheid van 'external evidence'. Hij heeft daartoe een van zijn onderzoekingen voorgelegd aan meer dan 20 buitenlandse didactici. Op grond van hun uitvoerig respons op een gedetailleerde vragenlijst komt Goffree tot de conclusie dat het 'forum' de bruikbaarheid van zijn systeem van aangrijpingspunten voor de didactische vorming van de aanstaande onderwijzer in bevredigende mate onderschrijft.

7 De lijvige, fraai uitgegeven dissertatie van Goffree is nog niet in de handel. De inhoud is dermate belangrijk voor allen wie de ontwikkeling van het wiskundig leren en onderwijzen ter harte gaat, dat het te hopen is dat dit

onderzoek (samen met dat van Treffers) aanleiding zal geven tot het in de handel brengen van een bondige samenvatting waarin de essentie van de onderzoekingen tot zijn recht komt.
Een dergelijk boekwerk zou de didactische oriëntatie van een brede schare van dienaren uit de onderscheiden kringen van ons onderwijs ten goede kunnen doen komen.

Naschrift

Een handelsuitgave van Goffree's proefschrift is ondertussen verschenen.
We hebben er ons buitengewoon over verheugd, dat aan Goffree op grond van de wijze waarop hij aan zijn inzichten op het gebied van de vernieuwing van het onderwijs aan jeugdige leerlingen in boekvorm gestalte heeft weten te geven, op 12 december in Amsterdam de '*Kluwerprijs 1979*' kon worden uitgereikt. De prijsuitreiking geschiedde door *Hermes*, staatssecretaris van onderwijs, terwijl prof. *Van Wijngaarden*, directeur van het M.C. te Amsterdam, een rede hield over '*Taal en Wiskunde*'. Van de commissie die voor de prijstoekenning adviseerde, maakte prof. *Sixma*, een van Goffree's promotores, deel uit.
Ik besluit mijn recensie gaarne met een extra gelukwens aan Goffree en het IOWO.

Deel uit de toespraak bij de opening van de V.U.-tentoonstelling over informatica bij gelegenheid van het 100 jaar bestaan van de V.U.

PROF. DR. M. EUWE

... Ook in het voortgezet onderwijs en eventueel zelfs het lager onderwijs moet een plaats worden ingeruimd voor informatica, of zo men wil computerkunde. De school bereidt voor op de maatschappij en daarin neemt de computer een belangrijke plaats in. Juist waar het mystieke zaken als automatisering en computer betreft, is het belangrijk dat men ongeveer op de hoogte is.

Kennis van zaken verdrijft de ongegronde angst die het gevolg is van prestaties van machines die ons voorstellingsvermogen te boven gaan. Onwetendheid is een slechte raadgever, die men overal tegenkomt tot zelfs in de hoogste intellectuele kringen. Wanneer men van jongs af aan enigszins vertrouwd is geraakt met het fenomeen computer, zal de vrees verdwijnen en plaats maken voor begrip, met of zonder instemming. Maar daarmee wordt in ieder geval bereikt dat eventuele kritiek op argumenten steunt, waarop nader kan worden ingegaan. Men weet dan tenminste waarover men spreekt, waartegen men protesteert.

Het is met informatica op onze middelbare scholen nog niet zo rooskleurig gesteld. Op veel scholen wordt wel met computers gewerkt en op een verdienstelijke wijze, maar nog lang niet op alle scholen. Alsnog ontbreekt de wettelijke basis voor verplicht onderwijs in de informatica.

Het is voor ons land en onze economie van groot belang dat het peil van de computerkennis zo hoog mogelijk ligt. Men hoort dikwijls dat van alle computertoepassingen in ons land slechts 30-40 % als volledig geslaagd te beschouwen is. Dit ligt niet aan de computer, maar aan de mens. Een mislukte toepassing is schadelijk voor onze economie. Een betere algemene kennis van zaken zou het percentage mislukkingen aanzienlijk kunnen doen verlagen ...

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin. Dillenburg 148, 6865 NN Doorwerth.

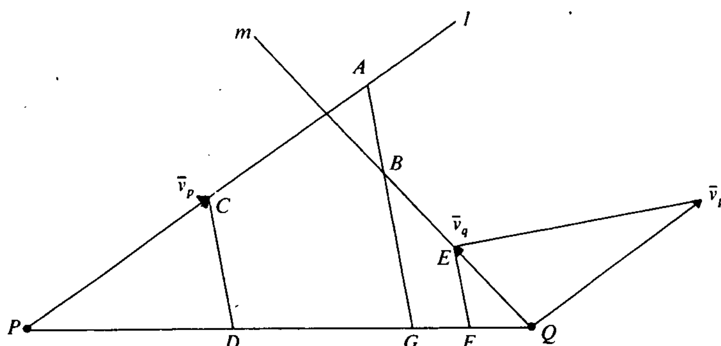
Opgaven

419. Voor het getal 525 geldt: eerste cijfer = derde cijfer en som eerste en tweede cijfer = 7. Dit getal is deelbaar door 7.
Dat geldt ook voor andere getallen van drie cijfers met deze twee eigenschappen, zoals 434 en 161.
Verklaar dit.
Getal heeft drie cijfers $\wedge$ eerste cijfer = derde cijfer $\wedge$ som eerste en tweede cijfer deelbaar door $a \Rightarrow$ getal deelbaar door a
geldt niet alleen voor $a = 7$, maar nog voor een ander getal.
Welk getal is dat?
Vind analoge resultaten voor getallen van vijf cijfers.
(Uit The Mathematics Teacher, April 1978.)

420. Ik neem aan dat u op de hoogte is van de manier waarop de nummerborden van de personenauto's in Nederland van letters en cijfers voorzien zijn. Op het ogenblik eerst twee cijfers, dan twee letters en dan weer twee cijfers. Onlangs was men zo ver, dat juist alle auto's met eerste letter V in circulatie waren gekomen. Een steekproef wees uit, dat 8% van het aantal personenauto's een nummerbord had met twee cijfers, twee letters, twee cijfers, waarvan de eerste letter een V was. Ongeveer zeven jaar geleden was de situatie analoog, alleen stonden toen de twee letters achteraan. Toen wees een steekproef uit, dat 6% van het aantal personenauto's een nummerbord had met vier cijfers, gevolgd door twee letters waarvan de eerste een V was.
Conclusie: er worden tegenwoordig meer nieuwe auto's verkocht dan zeven jaar geleden.

Oplossingen

417. De stoffelijke punten p en q bewegen zich langs l en m. Ze starten gelijktijdig in P en Q; $|\bar{v}_p| = 2|\bar{v}_q|$. Vind door constructie de punten A en B waar ze zich bevinden, als hun afstand minimaal is.



Kies $\bar{v}_p$ willekeurig en $\bar{v}_q$ zo, dat $|\bar{v}_q| = \frac{1}{2}|\bar{v}_p|$. De afstand van p en q is minimaal, als hun verbindingslijnstuk loodrecht staat op de richting van $\bar{v}_p - \bar{v}_q$. Teken $\bar{v}_p - \bar{v}_q$ en loodrecht daarop EF. Trek $CD // EF$. Construeer punt G op PQ zo, dat $PG : QG = PD : QF$. Trek door G een lijn evenwijdig aan EF. Deze snijdt l en m in de gevraagde punten A en B.

418. Is er een getal waarvan alle cijfers gelijk zijn (en niet 1) dat deelbaar is door het produkt van de cijfers?
Evident is dat het getal niet kan bestaan uit uitsluitend cijfers 2, 4, 5, 6 of 8. Blijft over te onderzoeken 3, 7 en 9.
Onderstel het getal bestaat uit uitsluitend cijfers 3. Wil het deelbaar zijn door 3^2, dan moet het getal uit minstens 3 cijfers 3 bestaan. $333/3^2 = 37$. Dan volgt als eerste getal dat deelbaar is door 3^3, een getal dat bestaat uit 9 cijfers 3.
$333\,333\,333/3^3 = 037\,037\,037/3 = 012\,345\,679$.
Deze cijfergroepen bestaan resp. uit 012, 012 + 333, 012 + 667. Dus uit 012, 012 + een 3-voud, 012 + een 3-voud + 1. Samen is dit een 3-voud + 1.
Voor deelbaarheid door 3^4 hebben we analoog 27 cijfers 3 nodig.
Het quotiënt bestaat uit 9 cijfergroepen van 3 cijfers die er resp. uitzien
a, a + 333, a + 333, . . ., a + 333, a + 667
Dus weer een 3-voud + 1.
Zo gaat het door. Voor deelbaarheid door 3^n zijn minstens 3^{n-1} cijfers 3 nodig. Het getal is dus nimmer deelbaar door het produkt van zijn cijfers.
Op precies dezelfde manier bewijzen we, dat ook een getal dat uit alleen 9's bestaat, niet deelbaar is door het produkt van zijn cijfers.
Bij 7 is de redenering iets gecompliceerder, maar het principe verandert niet. Voór de deelbaarheid door 7^2 zijn minstens 6 cijfers 7 nodig, voor deelbaarheid door 7^3 minstens $6 \cdot 7$ cijfers 7, . . ., voor deelbaarheid door 7^n minstens $6 \cdot 7^{n-2}$ cijfers 7.
Een uitdaging is natuurlijk een getal te vinden dat deelbaar is door het produkt van zijn cijfers en waarvan het laagste cijfer maximaal is. Zoals steeds houd ik mij aanbevolen voor resultaten, hetzij van positieve hetzij van negatieve aard.
Bijv. is uitsluitend cijfers 8 en 9 uitgesloten? Ik vermoed dat dit uitgesloten is, maar heb het bewijs niet gevonden.

Boekbesprekingen

Theodor Laufer, *Grundlagen der Synthese des Absoluten*, Verlag Hans Richarz, Sankt Augustin, 1979, 294 blz.

In dit boek wordt 'zum ersten Male versucht, aus der Existenz unser aller 'Ich' nach entsprechender Verallgemeinung das tatsächliche physikalische Geschehen durch elementare logiseh-mathematische Prozesse abzuleiten'.
De visie van de auteur is daarbij uit te gaan van de hypothese (het algemene, geestelijke) en daarvan uitgaande af te dalen naar het concrete. Weliswaar speelt het concrete een rol bij het tot stand komen van de hypothese. 'Die Hypothese wird manchmal durch eine grosze Anzahl erfolgloser Experimente nahegelegt. So ist beispielsweise der Satz der Erhaltung der Energie aus den zahlreichen erfolglosen Versuchen entstanden, ein Perpetuum mobile aufzubauen. Die Relativitätstheorie baut auf der Tatsache auf, dasz bisher keine höhere Geschwindigkeit als die des Lichts beobachtet werden könnte.'
Nu zijn er lezers wier haren te berge rijzen en lezers wier nieuwsgierigheid hierdoor geprikkeld wordt. Ik schrijf uiteraard alleen voor de tweede categorie verder.
De meest algemene wet volgens welke zich hogere vormen ontwikkelen, is de contradictieloosheid. De logica kan tot verschillende en dus contradictieloze vormen leiden, bijv. in het dagelijks leven en in de fysica. Zo heeft een deeltje een zekere waarschijnlijkheid zich soms als massa en dan weer als golf voor te doen.
De drie fundamentele logische processen die bij de ontwikkeling van het Ik een rol spelen, zijn het 'Sowohl-als-auch', het 'Entweder-oder' en het 'Auszer'. Deze processen leiden van het waarneembare Ik tot een aftelbaar oneindige Ich-Menge. We gaan nu door. 'Es wird eine Ich-Menge gebildet, die die Mächtigkeit der Summe aller möglichen Abzählbarkeiten besitzt. Dies ist die Mächtigkeit des Kontinuums, die nach Cantor mit $\aleph_1$ bezeichnet wird.' Ik laat dit onvertaald, want u zoudt nooit geloven, dat ik het goed vertaald had. Zo gaat het verder. Er wordt een

existentieboom opgericht met ordinaalgetallen als $\aleph_{\omega^2+\omega k+2}$. U hoeft niet bang te zijn, dat er ordinaalgetallen te kort zijn, omdat de rij ophoudt. Want met transfiniete inductie laat zich bewijzen, dat dit niet het geval is. (Net zoals we met behulp van volledige inductie bewijzen, dat de rij van de natuurlijke getallen geen eind heeft. Verduidelijking door de recensent.)
Zo gaat het door. We lezen ten slotte, dat reeds de Oude Grieken zich bezighielden met eenheid en veelheid, maar dat onder meer hun gebrek aan kennis t.a.v. de transfiniete getallen hen verhinderd heeft hogere vormen af te leiden.
Als nu uw nieuwsgierigheid voldoende geprikkeld is, moet u het boek kopen en zelf lezen. De prijs weet ik helaas niet, maar deze kan nooit een bezwaar zijn.

P. G. J. Vredenduin

R. G. Laha and V. K. Rohatgi, *Probability Theory*, Wiley & Sons, New York. £ 17.75 $ 38.50; 557 p. + xiii.

De laatste jaren zijn veel leerboeken op het gebied van de waarschijnlijkheidsrekening verschenen. Toch wil ik dit boek niet afdoen met de opmerking 'al weer een leerboek over waarschijnlijkheidsrekening'. De eerste zes hoofdstukken behandelen de onderwerpen die in veel boeken voorkomen. In het zevende (en laatste) hoofdstuk – ongeveer honderd bladzijden – worden stochastische grootheden die waarden aannemen in genormeerde lineaire ruimten besproken. Dit toont duidelijk aan dat het een boek is voor specialisten en studenten die dat willen worden. De benodigde voorkennis: analyse, maattheorie en lineaire analyse.
Aan het eind van ieder hoofdstuk staan vele opgaven. Sommige hiervan zijn beslist niet eenvoudig. Ter illustratie van deze laatste bewering: de bekende Halmos-Savage faktorisatie stelling voor de dichtheid van een stochastische vektor in een faktor met een voldoende stochastische grootheid en een tweede faktor zonder de parameter wordt als opgave gegeven. Dit is slechts één voorbeeld. In vele andere opgaven kan men resultaten tegenkomen die de afgelopen jaren zijn gepubliceerd.

J. L. Mijnheer

N. Popescu en L. Popescu, *Theory of Categories*, Editura Academiei, Boekarest en Sijthoff & Noordhoff International Publishers, 1979; 342 blz., *f* 70,00/$ 35.00.

Ofschoon de theorie van categorieën een betrekkelijk jonge tak van de wiskunde is, bestaat er op het ogenblik reeds een grote hoeveelheid belangrijke resultaten (verdeeld over een groot aantal artikelen), alsmede een aantal handboeken over dit onderwerp. De schrijvers van dit boek hebben zich tot taak gesteld om een zodanig werk over categorieën te schrijven, dat de lezer – met een geringe voorkennis (?) – in staat is om het boek te kunnen lezen.
De categorieën-theorie is – in zekere zin – een overkoepeling van een aantal gebieden uit de wiskunde. Daarom is het gewenst, dat men over een zekere voorkennis beschikt, met name van de verzamelingsleer, van de algebra (groepen, ringen, moduli) en van de topologie, alvorens men zich aan categorieën-theorie gaat wijden. Dit onderwerp heeft niet alleen de belangstelling van de zuiver wiskundigen, doch evenzeer van hen, die werkzaam zijn in de informatica, de mathematische biologie, de theoretische linguistiek, enz. In elk van die gevallen is de 'geringe' voorkennis echter een behoorlijk zware eis. De schrijvers hebben getracht om categorieën-theorie als een geschikte-nieuwe-taal te introduceren; een taal, die reeds bekende begrippen bij elkaar brengt en die dus uiteindelijk een grotere eenheid in de wiskunde tot stand brengt.
Door steeds nieuwe begrippen te toetsen aan reeds bekende voorbeelden hopen de schrijvers, dat het betrekkelijk hoge niveau van abstractie in de categorieën-theorie een grote mate van voldoening schenkt.
Kort samengevat luidt de definitie van een categorie als volgt:
Een *categorie* (aangeduid door $\mathscr{C}$) bestaat uit:

a een klasse Obj ($\mathscr{C}$), waarvan we de elementen de *objecten* van $\mathscr{C}$ noemen;
b voor elk geordend paar (X, Y) van objecten in $\mathscr{C}$ bestaat een verzameling $\mathscr{C}(X, Y)$, de verzameling van de zg. *morfismen* van X in Y. Is $f \in \mathscr{C}(X, Y)$, dan duidt men f aan door $f: X \to Y$, of door $X \xrightarrow{f} Y$;
c de verzamelingen $\mathscr{C}(X, Y)$ voldoen aan de eis: indien $(X, Y) \neq (X', Y')$, dan zijn $\mathscr{C}(X, Y)$ en $\mathscr{C}(X', Y')$ disjunct. Bovendien moet voor de elementen van $\mathscr{C}(X, Y)$ en $\mathscr{C}(Y, Z)$ een produktregel bestaan (d.w.z., als $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, dan bestaat een produkt $g \circ f: Y \to Z$, zodat aan een associativiteitsvoorwaarde is voldaan). Bovendien moet voor elk object $X \in \mathscr{C}$ een *identiteitsmorfisme* $1_X \in \mathscr{C}(X, X)$ bestaan, zodat $f \cdot 1_X = f$ en $1_X \cdot g = g$ (aangenomen, dat $f \circ 1_X$ en $1_X \circ g$ bestaan).

Voorbeelden:
1 De categorie V = *Verz*., waarvan de klasse V van objecten de klasse is van alle verzamelingen; voor twee objecten A, B (uit V) zij $V(A, B)$ = $Hom(A, B)$ de verzameling van alle afbeeldingen $f: A \to B$ (d.z. dus de afbeeldingen van A in B).
2 De categorie $\mathscr{G}$, waarvan de klasse van objecten de klasse van alle groepen is, terwijl $\mathscr{G}(A, B) = Hom(A, B)$ de verzameling is van alle groep-homomorfismen $f: A \to B$ van A in B.
3 De categorie R van alle ringen, terwijl $Hom(A, B)$ voor elk paar A, $B \in R$ de verzameling van de ring-homomorfismen $f: A \to B$ van A in B is.

Evenals in de hier genoemde voorbeelden kent men ook in de theorie van categorieën bijzondere morfismen, zoals een monomorfie, endomorfie, isomorfie, enz. Zoals de congruentie-relatie voor elementaire vlakke figuren kan worden uitgesproken door middel van één-éénduidige afbeeldingen die afstanden invariant laten, bestaat in de categorieën-theorie een analoog begrip, nl. dat van de *functor*. Een functor is een functie F van de klasse van morfismen van een categorie $\mathscr{C}$ in de klasse van morfismen van een categorie $\mathscr{D}$, zodat voldaan is aan de beide eisen:
1 is e een $\mathscr{C}$-identiteit, dan is $F(e)$ een $\mathscr{D}$-identiteit;
2 F 'behoudt' de kompositie, d.w.z.: $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$.

Men duidt een functor aan door $F: \mathscr{C} \to \mathscr{D}$. Omdat voor elke categorie $\mathscr{C}$ een één-éénduidige betrekking $A \leftrightarrow 1_A$ bestaat tussen de objecten van $\mathscr{C}$ en de identiteiten van $\mathscr{C}$, induceert elke functor $F: \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ een functie (die we eveneens door F aanduiden) van de klasse $Obj(\mathscr{C})$ in de klasse $Obj(\mathscr{D})$, zodat $F(1_A) = 1_{F(A)}$ voor elke $A \in Obj(\mathscr{C})$.

Met deze inleidende begrippen (van het eerste hoofdstuk) kan de geïnteresseerde lezer een héél eind uit de voeten. Het heeft geen zin om hier in te gaan op de verdere resultaten; liever zou ik willen volstaan met een beschrijving van de inhoud van de verdere hoofdstukken. Hoofdstuk 2 behandelt het probleem van het volledig-maken van categorieën, d.w.z. het probleem van de inbedding van een gegeven categorie in een categorie met zekere additionele eigenschappen (speciaal die eigenschappen, die te maken hebben met het bestaan van limieten). Hoofdstuk 3 handelt over algebraïsche categorieën, terwijl Hoofdstuk 4 de zg. abelse categorieën behandelt. De theorie van dit laatste onderwerp is het meest ontwikkeld en hierover bestaat ook het grootste aantal toepassingen. Samenvattend zou ik willen zeggen: een voortreffelijk boek, dat aan de lezer de eis stelt, dat hij/zij over een behoorlijke voorkennis van de reeds genoemde gebieden van de wiskunde beschikt.

F. Loonstra

S. W. Douma, *Lineaire programmering als hulpmiddel bij de besluitvorming*, Academic Service, Den Haag 1979, 144 blz., *f* 19,50.

Een beknopte behandeling van de techniek van het lineair programmeren treft men tegenwoordig in diverse schoolboeken aan. Wie over toepassingen van lineaire programmering iets meer te weten wil komen, moet het bovenvermelde boek eens ter hand nemen. Het is een elementaire inleiding bestemd voor studenten in economie en aanverwante wetenschappen.
Aan de hand van het bekende voorbeeld van een onderneming die moet beslissen welke hoeveelheden van twee produkten A en B gemaakt moeten worden als de capaciteit van machines I en II en het aantal beschikbare arbeidsuren gegeven zijn, worden o.a. de grafische methode, simplexmethode en gevoeligheidsanalyse beschreven. Het boek besluit met twee omvangrijke voorbeel-

den van produktieplanning resp. de opstelling van een structuurplan voor een gemeente. Hierbij wordt de oplossing afgedrukt welke verkregen is met een computerprogramma van het IOWO. Met name het laatstgenoemde voorbeeld laat op boeiende wijze zien wat men met lineair programmeren in de praktijk kan doen. De opsomming van de voor- en nadelen van deze toepassing op blz. 122 e.v. maakt wel een wat onevenwichtige indruk: slechts met grote moeite ben ik erin geslaagd één nadeel te vinden in de bijna twee pagina's lange lijst.
De behandeling van de stof is geheel intuïtief en doorgaans goed te volgen. De auteur beperkt zich tot het beschrijven van de diverse methoden aan de hand van voorbeelden; wiskundige achtergronden komen niet aan bod. Van de goed verzorgde serie opgaven wordt een deel volledig uitgewerkt. Voor de wiskundig geschoolde lezer is het vrijwel ontbreken van exacte formuleringen wellicht een minpunt; daar staat tegenover een verzameling aardige voorbeelden, die men in meer wiskundig georiënteerde werken vaak slechts spaarzaam aantreft.

T. H. Chen

A. Ollongren, Th. P. van der Weide, *Abstracte automaten en grammatica's*, Academic Service, Den Haag 1979, 108 blz., *f* 17,50.

Abstracte automaten en formele grammatica's, waar dit boek een inleidende beschouwing aan wijdt, behoren tot de basisbegrippen van de theoretische informatica; het zijn begrippen die men moet kennen om iets te kunnen begrijpen van bijv. de achtergronden van computertalen.
In het eerste hoofdstuk wordt de algemene definitie van een abstracte automaat gegeven. Het tweede hoofdstuk beschrijft eindige automaten, Mealy-automaten, stapelautomaten en 2-stapelautomaten. Dit zijn allen automaten die een taal kunnen accepteren, d.w.z. bij elke automaat A bestaat een taal L met de eigenschap dat A precies alle woorden van L accepteert en alle andere woorden verwerpt. (Men denke bij L aan een programmeertaal; een woord van L is dan een syntactisch correct programma in die taal geschreven). De formele gramatica's van dergelijke talen worden in het derde hoofdstuk volgens de bekende hiërarchie van Chomsky gedefinieerd, waarna o.a. bewezen wordt dat voor iedere grammatica een accepterende automaat gevonden kan worden, en omgekeerd. De meeste aandacht gaat naar de context-vrije grammatica's, welke een grote rol spelen bij de beschrijving van programmeertalen. Het vierde en laatste hoofdstuk heeft als onderwerp de recentelijk door Van Wijngaarden ingevoerde grammatica's die op twee niveaus werken, en geeft een definitie van een programmeertaal met behulp hiervan.
Om de inhoud te kunnen volgen, is geen speciale voorkennis vereist: de theorie wordt volledig vanaf de basis opgebouwd, zij het dat een enkele keer voor een bewijs naar de literatuur verwezen wordt. Elk hoofdstuk besluit met een reeks opgaven die goed aansluit bij het behandelde. Op één kleine slordigheid echter wil ik wijzen: in de definitie van grammatica wordt uitsluitend gesproken over 'eindsymbool' en 'hulpsymbool', terwijl later op diverse plaatsen hiervoor de termen 'terminal' resp. 'non-terminal' gebruikt worden. Ook de betekenis van 'ε-beweging', 'onafhankelijkheid van non-terminals' en 'produktieregels' (i.p.v. 'herschrijfregels') zal de lezer uit de context moeten halen.
Uit het voorafgaande zal duidelijk zijn dat dit boek geschikt is voor een eerste kennismaking met het onderwerp hoewel in de eerste plaats bestemd voor wiskundestudenten, zal het ook menige VWO-docent kunnen boeien.

T. H. Chen

P. Griffiths and J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, John Wiley & Sons, New York, etc. (1978), 811 pp., £ 29.60 = \$ 58.00.

Wie in de eerste decennia dezer eeuw wiskunde studeerde, ontmoette daarbij de algebraïsche meetkunde zoals die in het gulden tijdvak der geometrie ontwikkeld was door Plücker, Kummer, Cayley en vele anderen. De merkwaardige eigenschappen van specifieke krommen en opper-

vlakken van niet al te hoge graad hadden de aandacht en de begrippen konden eventueel visueel worden verhelderd door wandplaten en gips- en draadmodellen.
Sindsdien is er veel veranderd. Een moderne algebraïsche meetkunde ontstond. Algebra kreeg een veel ruimere betekenis. Nieuwe begrippen uit de analyse werden in stelling gebracht en er ontwikkelde zich een gebied van onderzoek waarbij de aanschouwelijkheid terugweek voor een meer abstract stelsel van grote algemeenheid. Het tweede woord in de naam kon behouden blijven krachtens de bekende definitie van J. A. Schouten: een wiskundig onderwerp heet meetkunde als veel mensen het zo noemen. Wie er niet mee is opgegroeid staat met bewondering voor de algemene resultaten der nieuwe leer en voor de geraffineerde begrippen en methodieken die er toe leiden. Het valt hem niet licht er mee vertrouwd te raken en de toegang wordt nog bemoeilijkt door de contacten van het veld met de topologie en getallenleer. De schrijvers van bovenstaand boek constateren dan ook dat 'there has arisen about the subject a reputation of inaccessibility'. Na de hevige groei in de laatste decennia schijnt thans een zekere consolidatie te zijn ingetreden. Springer kon onlangs de verschijning van vier samenvattende boeken over algebraïsche meetkunde in zijn fonds berichten.

Het volumineuze werk van Griffiths en Harris dat zich blijkens de titel tot de beginselen heet te beperken, heeft een aantrekkelijk uitgangspunt: het tracht een synthese tot stand te brengen tussen de moderne ontwikkeling en de klassieke resultaten. Dat bepaalt mede de compositie waarbij de bespreking der nodige technieken wordt afgewisseld met toepassing en voorbeeld. Het lijkt zinloos hier een opsomming te geven van de inhoud. De breedte van het bestreken terrein zij gekarakteriseerd door het feit dat het eerste hoofdstuk gewijd is aan complexe functietheorie, terwijl het laatste het exacte aantal kegelsneden afleidt die vijf gegevene raken en een gedegen behandeling geeft van het kwadratische lijncomplex.
Wie voorheen en thans wil vergelijken neme bijv. kennis van p. 263-282, waar de klassieke formules van Plücker over dubbelpunten, buigpunten enz. van vlakke algebraïsche krommen bijzondere gevallen blijken van zeer algemene theorema's.
Het werk van Griffiths en Harris is helder en zorgvuldig geschreven en, mede door zijn doelstelling, aanbevelenswaardig. Voor een eerste kennismaking met het onderwerp lijkt het minder geschikt.

O. Bottema

Prof. Dr. S. D. Chatterji e.a., *Jahrbuch Überblicke Mathematik 1979*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 206 blz. DM 28,–

Sinds 1968 verschijnt jaarlijks een jaarboek 'Überblicke', waarin overzichtsartikelen worden opgenomen uit verschillende deelgebieden der wiskunde. En wel zodanig dat deze niet alleen geschikt zijn voor specialisten op het betreffende gebied.
Speciaal krijgen actuele ontwikkelingen en onderzoeken de aandacht. Zo komen in dit jaarboek de volgende artikelen voor:
L. Nachbin: Warum unendlichdimensionale Holomorfie?
S. D. Chatterji: Wahrscheinlichkeitstheorie – ein mathematischer Uberblick.
Ch. Reinsch: Die Behandlung von Rundungsfehlern in der numerischen Analysis.
G. Alefeld: Intervallanalytische Methoden bei nichtlinearen Gleichungen.
H. Lenz: Blockpläne und Verwandte Inzidenzstrukturen.
B. Fuchssteiner, J. Horvàth: Die Bedeutung der Schnitteigenschaften beim Hahn-Banachschen Satz.
L. Reich, J. Schwaiger: Analytische und fraktionelle Iteration formal-biholomorpher Abbildungen.
Daarnaast wordt ingegaan op het 18e internationale congres in Helsinki. Speciaal wordt het werk van Margulis, Fefferman, Quillen en Deligne (prijswinnaars van de Fields-medaille) besproken.
Artikelen over de wiskunde-olympiade, wiskundigen in de industrie, het werk van Escher en een cursus reken-datatechniek van de T.U. Wenen sluiten het geheel af.
Een aardig boek vol lezenswaardigheden.

W. Kleijne

Mededelingen

TEACHIP

TEACHIP is een werkgroep waarin personen zijn verenigd afkomstig uit het basis- en voortgezet onderwijs, de lerarenopleiding en de computer- en uitgeverswereld.
Deze werkgroep is geïnteresseerd in de toepassing van micro-elektronica in het onderwijs.
Daarom wil TEACHIP graag in contact treden met mensen (al of niet in het bezit van apparatuur) die dezelfde interesse hebben. Geïnteresseerden kunnen contact opnemen met de secretaris van de werkgroep: P. C. Hooftlaan 46, 3705 AJ Zeist of met de voorzitter: 030-787311.

Vakantiecursus voor leraren in de exacte vakken en andere belangstellenden

De jaarlijks door de Stichting Mathematisch Centrum te organiseren Vakantiecursus voor leraren in de exacte vakken en andere belangstellenden zal ook dit jaar weer plaatsvinden in twee steden, t.w. in

AMSTERDAM op donderdag 14 en vrijdag 15 augustus 1980 en
EINDHOVEN op donderdag 21 en vrijdag 22 augustus 1980

Het onderwerp voor dit jaar zal zijn

"VERTELLINGEN OVER TELLINGEN"

Het programma zal er als volgt uitzien:

1e dag:

10.00-11.00 Prof. dr. H. J. A. DUPARC (Technische Hogeschool Delft)
Inleiding en historische ontwikkeling (Fibonacci, Euler, Cayley, Lucas, Mac Mahon, Redfield, Polya)

11.30-12.30 Dr. F. GÖBEL (Technische Hogeschool Twente)

14.00-14.45 *Teltechnieken (Incidentiestructuren, dubbel tellen, inclusie/exclusie, genererende functies, recurrente betrekkingen, Fibonacci-, Lucas- en Catalaanse- getallen, permanenten)*

15.15-16.15 Dr. ir. H. C. A. van TILBORG (Technische Hogeschool Eindhoven)
Woorden tellen (Toepassingen in de coderingstheorie).

2e dag:

9.30-10.30 Prof. dr. N. G. de BRUIJN (Technische Hogeschool Eindhoven)

11.00-12.00 *Stelling van Polya (zie Selecta Mathematica III, Heidelberger Taschenbuch Bd. 86, p. 1-26, 1971)*

13.30-14.30 Prof. dr. N. G. de BRUIJN
Tellingen van bomen en boomvormige moleculen (zie Selecta Mathematica III, Heidelberger Taschenbuch Bd. 86, p. 1-26, 1971)

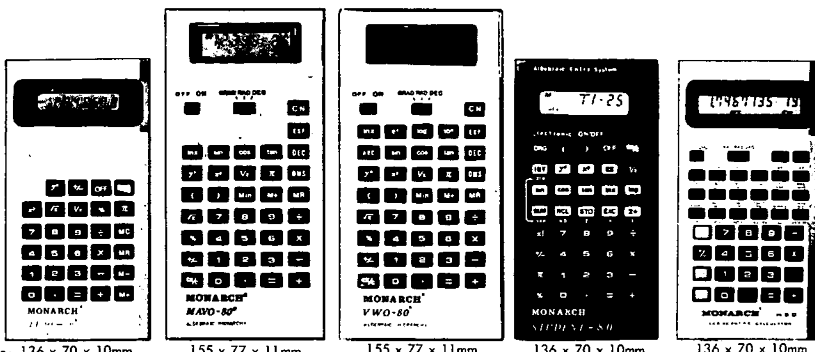
15.00-16.00 Prof. dr. H. W. LENSTRA jr. (Mathematisch Instituut, Universiteit van Amsterdam)
Talstelsels (p-adische getallen).

SYLLABUS: Naar verwachting zal er omstreeks eind juni een syllabus beschikbaar zijn voor degenen, die zich hebben aangemeld voor deelname aan de cursus.

INLICHTINGEN: Inlichtingen en aanmeldingsformulieren zijn te verkrijgen bij de administratie van het Mathematisch Centrum, 2e Boerhaavestraat 49, 1091 AL Amsterdam, tel. 020-947272, tst. 63.

N.B. Nà 20 juni a.s. zal het adres van het Mathematisch Centrum luiden:
KRUISLAAN 413, 1098 SJ Amsterdam of P.O. Box 4079, 1009 AB Amsterdam.
Het telefoonnummer zal dan worden: 020-5929333.

Doe de lessenaarproef met de nieuwe generatie Monarch handrekenmachines



ware grootte: 136 x 70 x 10mm | 155 x 77 x 11mm | 155 x 77 x 11mm | 136 x 70 x 10mm | 136 x 70 x 10mm

De vele pluspunten van de nieuwe generatie MONARCH handrekenmachines.

- Vijf aangepaste modellen voor de diverse onderwijsniveau's.
- Uitgebreide nederlandstalige gebruiksaanwijzingen met gemiddeld 65 uitgewerkte voorbeelden, geënt op de diverse leerniveau's. Zeer geschikt voor klassikale instruktie van de handrekenmachine.
- Bij de modellen MAVO-80 en VWO-80 wordt gratis het Vademecum-A met ruim 200 onderwerpen (algemeen, wis-, natuur-, scheikunde) bijgeleverd.
  (Winkelwaarde f 12,50 ISBN 90 70080 80X. Samengesteld door leraren).
- Gratis transparanten voor de overheadprojektor worden bijgeleverd.
- Met de enkelfunktie modellen LEAO-80, MAVO-80, VWO-80 maakt iedere leerling(e) beslist minder foutieve intoetsingen.
- Door de ruime toetsen worden dubbelaanslagen voorkomen.
- In de toets ingegraveerde symbolen, dus ook na jarenlang intensief gebruik duidelijke afleesbaarheid. (geldt nog niet voor model HBO).
- Nu met onverwoestbare klik-schakelaars, vernieuwde batterijklep, gevoeliger druktoetsen.
- Modellen MAVO-80 en VWO-80 met dubbel beveiligde uitlezing tegen breuk.
  Uitermate solide, vergrootte modellen, verzonken in rubber stootranden, dus ekstra goed bestand tegen vallen en harde schokken. doe zelf de lessenaarproef!
- LCD-uitlezing: twee knoopcelbatterijtjes voor een héél jaar rekenen.
- Vlotte garantie gedurende 18 maanden. Zeer snelle garantieservice ± 1 week.

Schoolprijzen reeds vanaf f 39,– inkl. btw, franko afgeleverd aan school.

Vraag uitgebreide dokumentatie en prijzen aan:

MAKUPORT ELECTRONICS BV

J. Tademaweg 9, 2031 CT Haarlem, tel. 023 - 31 78 50*

INHOUD:

ADRESSEN VAN DE AUTEURS:

Prof. Dr. N. G. de Bruijn, TH, postbus 513, 5600 MB Eindhoven.

P. M. van Hiele, Dr. Beguinlaan 64, 2272 AL Voorburg.

A. J. M. de Jong, Botter 17-40, 8232 IK Lelystad.

H. N. Schuring, Van Heemstralaan 21, 6814 KB Arnhem.

H. Sissing, Vijverlaan 429, 2923 TN Krimpen a/d IJssel.

Joh. H. Wansink, Julianalaan 84, 6824 KJ Arnhem.